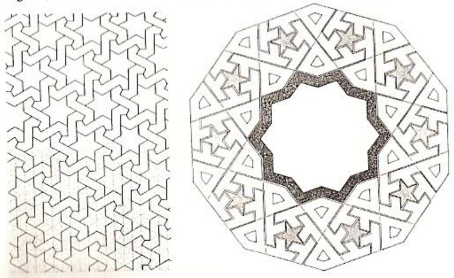
Kako tlakujejo matematiki

V lanski novembrski številki revije ŽIT smo lahko prebrali zanimiv sestavek o kvazikristalih. V njem je bil omenjen Roger Penrose (roj. 1931), znani angleški matematik in fizik, specialist za relativnostno in kvantno teorijo ter sodelavec znamenitega Stephena Hawkinga. Najbrž bo za bralce zanimivo izvedeti kaj več o njegovem, pa tudi o drugih tlakovanjih ravnine in o matematičnem ozadju tega početja.

GREGOR PAVLIČ

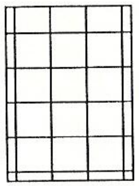
Oblaganje tal in sten z barvnimi kamenčki ali ploščicami je zelo star način okraševanja prostora. Od starih narodov so to ornamentiko največ uporabljali Egipčani, od njih pa so jo prevzeli Arabci, ki so jo razvili skoraj do popolnosti, saj so ornamenti edino dovoljeno okrasje v mošejah.

Prav do današnjih dni pa se je ohranilo oblaganje tal s ploščicami pravilnih oblik ali teselacija (lat. *tessera* = znamka, ploščica ali kamnita kocka, kajti prva tlakovanja so bila najbrž s kockami).

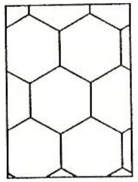


Primera islamskih vzorcev

Za matematike so posebej zanimiva tlakovanja s ploščicami, ki imajo obliko pravilnega večkotnika. Teh tlakovanj je natančno 11; tri so regularna, ko ravnino pokrijemo s skladnimi n-kotniki, 8 pa je polregularnih ali arhimedskih. Če hočemo ravnino prekriti s skladnimi pravilnimi n-kotniki, mora biti notranji kot pravilnega n-kotnika delitelj polnega kota. Vsota notranjih kotov n-kotnika je $(n-1)180\,°$, zato iščemo tiste vrednosti n, za katere je $k = 2n/(n-2) = 2 + 4/(n-2)$ naravno število. To pa velja le za $n = 3$, 4 in 6. Regularna pokritja so torej mogoča le z enakostraničnimi trikotniki, kvadrati in pravilnimi 6-kotniki. Označimo jih s 3.3.3.3.3.3, 4.4.4.4 in 6.6.6; ta zapis pomeni, koliko in kateri pravilni liki obkrožajo poljubno izbrano stično točko likov. Za dokaz polregularnih tlakovanj je treba imeti precej več matematičnega znanja, npr. reševanje diofantskih enačb, zato samo poglejmo, katera so ta tlakovanja in kakšne so njihove oznake.



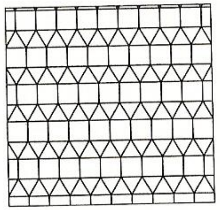
4.4.4.4



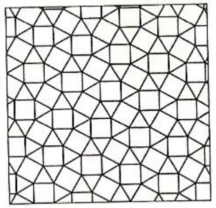
6.6.6

3.3.3.3.3.3

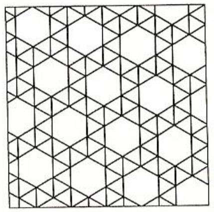
Trije primeri regularnih tlakovanj (zgoraj) in osem primerov polregularnih tlakovanj (spodaj)



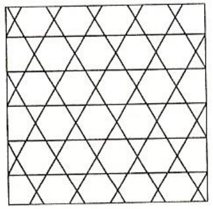
3.3.3.4.4



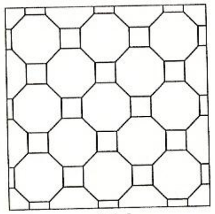
3.3.4.3.4



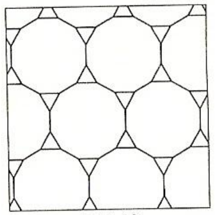
3.3.3.3.6



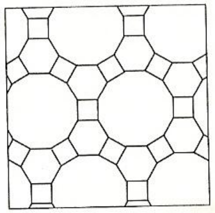
3.6.3.6



4.8.8

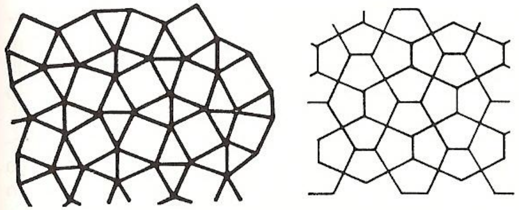


3.12.12

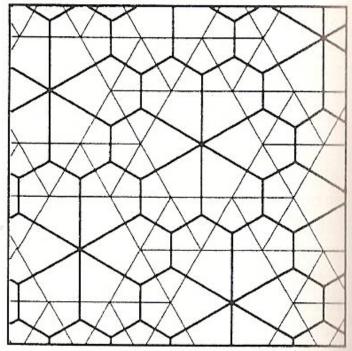


4.6.12

3.4.6.4

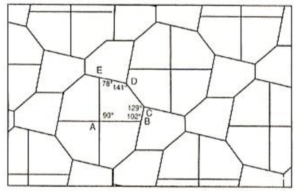


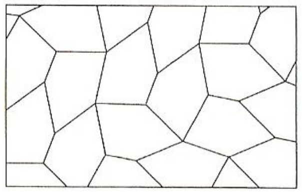
Tlakovanje 3.3.4.3.4 in dualno tlakovanje z »nepravilnimi« 5-kotniki



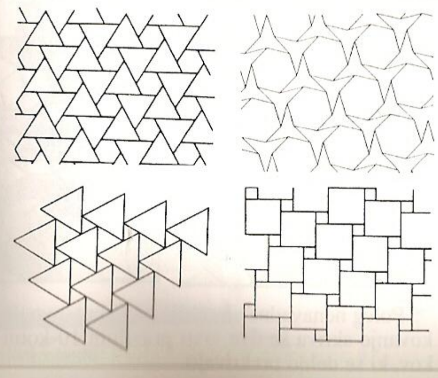
Tlakovanje »kairo«

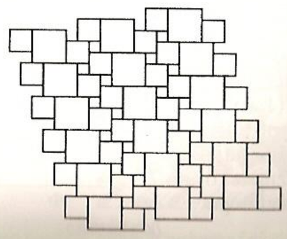
Vsakemu od regularnih in polregularnih tlakovanj lahko priredimo dualno tlakovanje tako, da povežemo središča obstoječih likov. Zanimivo pri tem je, da regularnim tlakovanjem ustrezajo regularna dualna tlakovanja: enakostraničnim trikotnikom pravilni 6-kotniki in obratno, kvadratom pa kvadrati (rečemo, da je množica regularnih tlakovanj za to transformacijo algebrsko zaprta). Množica polregularnih tlakovanj nima te lastnosti, pač pa dobimo z dualnostjo 8 novih zanimivih tlakovanj: npr. tlakovanju 3.3.3.3.6 ustreza t. i. tlakovanje »kairo« (po ornamentiki, znani iz Egipta), tlakovanju 3.3.4.3.4 pa tlakovanje z »nepravilnimi« 5-kotniki.





Tlakovanja so bila vedno tudi predmet rekreacijske matematike. Tako so že v 70. letih iskali pokritja ravnine s skladnimi 5-kotniki. Do nedavna je bilo znanih 14 primerov: poleg »kaira« še nekateri zelo zanimivi, enega od njih je našla celo neka gospodinja iz San Diega.

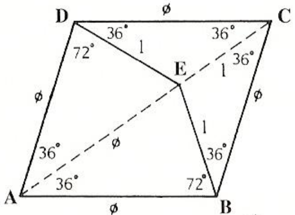


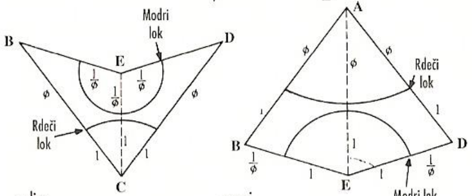


Ravnino je mogoče na veliko načinov pokriti tudi z enakimi pravilnimi liki, ki niso skladni in se ne stikajo z oglišči, ali pa z dvema ozirma več vrstami skladnih likov (pravilnih ali nepravilnih, konveksnih ali nekonveksnih), ki se ne stikajo z oglišči.

Tlakovanje je periodično, če je neobčutljivo na vzporedni premik oz. se pri vzporednem premiku slika ponovi (se preslika vase). Od omenjenih tlakovanj so periodična vsa regularna in polregulrana tlakovanja.

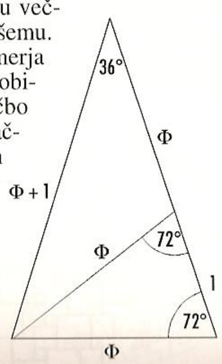
Penrose je za svoje tlakovanje ravnine uporabil dve vrsti ploščic: »sulico« in »zmaja«. Sulica je deltoid, sestavljen iz dveh zlatih trikotnikov *BCE*, zmaj pa iz dveh zlatih trikotnikov *BEA*. Enaka trikotnika vsakokrat oblikujeta deltoid (en konveksni in en nekonveksni), oba deltoida pa sestavljata romb s kotom 72 ° med osnovnim in stranskim robom.





sulica zmaj

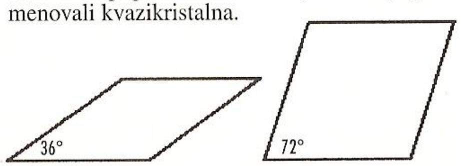
Zlati trikotnik je treba nekoliko podrobneje razložiti. Gre namreč za enakokraki trikotnik, katerega osnovnica in krak sta v zlatem rezu. Razdeliti dano daljico v zlatem rezu pomeni poiskati točko na daljici tako, da je razmerje celote proti večjemu delu enako razmerju večjega dela proti manjšemu. Iz opisanega sorazmerja $(a + b) : a = a : b$ dobimo kvadratno enačbo $a^2 - ab - b^2 = 0$. Enačbo delimo z b^2 in kvocient a/b označimo s Φ. Pozitivno rešitev te enačbe $\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$, kar je približno 1,618, imenujemo razmersko število zlatega reza.



Zlata trikotnika

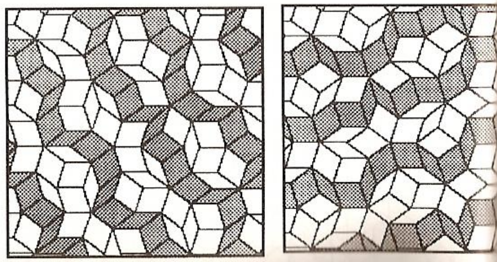
Število Φ se pri tem tlakovanju pojavi še enkrat. Razmerje med številom sulic in številom zmajev je namreč približno enako 1,6, oziroma če bi hoteli prekriti neskončno ravnino, bi bilo to razmerje natančno enako Φ.

Tlakovanje s sulico in zmajem je lahko periodičo ali neperiodično. Za slednje se moramo držati posebnih pravil. Pri tem nam pomagajo posebne oznake na ploščicah. Na vsako ploščico narišemo moder in rdeč lok. Če hočemo sestaviti neperiodično tlakovanje, moramo ploščice postavljati tako, da vedno staknemo modra loka (s tem dobimo modro krivuljo), ali rdeča loka (s tem dobimo rdečo krivuljo). Neperiodično tlakovanje z zmaji in sulicami, ki ga je skonstruiral Penrose, je odličen dvodimenzionalni model 5-števne simetrije, ki se je pokazala pri sipanju žarkov X na hitro ohlajeni zlitini aluminija in mangana, po enem od iznajditeljev imenovani *šehtmanit.* To odkritje je leta 1984 porušilo najstarejše in najtrdnejše teoreme kristalografije. Nadaljnja raziskovanja mikrostrukture te zlitine so pokazala, da ni niti kristalna niti popolnoma amorfna, zato so jo poimenovali kvazikristalna.



Kasneje je Penrose omenjeno neperiodično tlakovanje izboljšal tako, da je za ploščice izbral dva drugačna romba: prvi ima med stranicama ostri kot 36 °, drugi pa kot 72 °.

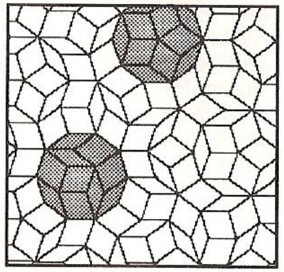
Tudi to tlakovanje ima 5-števno simetrijo, ki se pokaže, če označimo rombe vzdolž vzporednih, skoraj enako razmaknjenih premic. Obstaja namreč 5 družin takih snopov premic, ki se sekajo pod koti, ki so večkratniki kota 72 °.



Poleg nenavadne simetrije pa Penrosovo tlakovanje skriva še dve vrsti pravilnih 10-kotnikov, ki se delno prekrivajo.

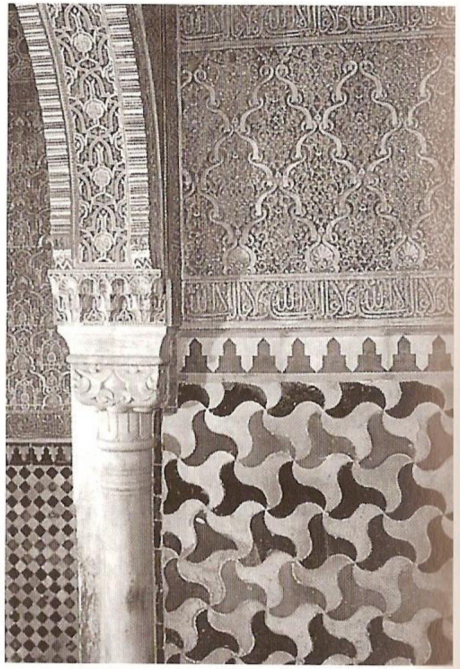
Vsaka ploščica leži v enem od takih dveh 10-kotnikov, začuda pa je razmerje števila enih in drugih spet enako razmerju zlatega reza Φ.

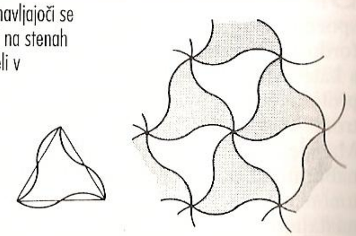
Raziskovanje kvazikristalov se nadaljuje. Leta 1992 sta znanstvenika P. W. Stephen in A. I. Golberg poročala o novi zlitini aluminija, bakra in železa, ki kaže isto simetrijo kot Penrosovo neperiodično tlakovanje.



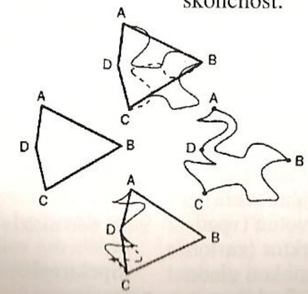
Ornamentika in tlakovanje sta vedno zanimala tudi umetnike. Nekateri so v svojih delih le omilili strogost vzorcev, drugi pa so šli v svojih prijemih precej dlje. Najbrž je najbolj znan med njimi Maurits Cornelis Escher (1898–1972). Razvijal se je v izvrstnega krajinarja, dokler ni leta 1936 obiskal mavrskega dvorca Alhambra v Kordovi v Španiji. Ta ga je s svojimi čudovitimi arabeskami in ornamentiko tako navdušil, da je začel resno preučevati geometrijske vzorce in tlakovanja ravnine ter popolnoma prenehal s prejšnjim načinom slikanja.


»Neskončnost«


Zapleteni, ponavljajoči se okrasni vzorci na stenah kraljevih kopeli v Alhambri



Escher je pri svojih, danes zamenitih grafikah uporabljal toge geometrijske transformacije: vzporedni premik, vrtenje in zrcaljenje, v nekaterih slikah pa je s postopno osvoboditvijo od strogih oblik na nek način upodobil neskončnost.




Primer translacije, rotacije in zrcaljenja v Escherjevih »Labodih«