

Bach, mojster Jaka in matematika

Brez matematike v življenju ne gre. Z matematičnimi sredstvi smo navajeni opisovati fizikalne pojave, kemijske reakcije, pa tudi ekonomske modele. Velikokrat najdemo sledi matematike celo tam, kjer jih gotovo ne bi pričakovali. Najbrž bo zato za bralce zanimiva matematična analiza nekaj Bachovih del.

GREGOR PAVLIČ

Beseda kánon je grškega izvora in pomeni predpis ali pravilo. V antičnem času so tako imenovali napravo za ugotavljanje matematičnih zakonov napete strune, iz katere se je kasneje razvil monokord. V bizantinski liturgiji je bil kánon ena glavnih oblik himnodije – zaporedja 9 himničnih spevov, ki so jih prepevali kantiki. Nas bo kánon zanimal kot najstrožja glasbena oblika večglasja, ko dva ali več glasov poje isto melodijo, le da vstopajo drug za drugim in v enakih časovnih intervalih. Najbrž ni nikogar, ki ne pozna 4-glasnega kánona z naslovom *Mojster Jaka*:

- Pri *rakovem ali retrogradnem kánonu* 2. glas začne hkrati s prvim, vendar izvaja melodijo od zadnjega konca.
- Pri *proporcionalnem kánonu* 2. glas prav tako začne hkrati s prvim, vendar izvaja melodijo v določenem razmerju glede na 1. glas (počasneje ali hitreje). Če je razmerje dolžine melodije 1. in 2. glasu večje od 1, je kánon augmentiran, v nasprotnem primeru pa je diminuiran.
- Še več prostosti dovoljujejo npr. *spiralni in spremljani kánon*, *dvojni ali trojni kánon* ter *kriptični kánon*.

1. Mojster Jaka,
mojster Jaka,

al' že spiš,
al' že spiš?

Al' ne slišiš zvona,
al' ne slišiš zvona?

Bim, bam, bom,
bim, bam, bom.

2. Mojster Jaka,
mojster Jaka,

al' že spiš,
al' že spiš?

Al' ne slišiš zvona,
al' ne slišiš zvona?

3. Mojster Jaka,
mojster Jaka,

al' že spiš,
al' že spiš?

4. Mojster Jaka,
mojster Jaka,

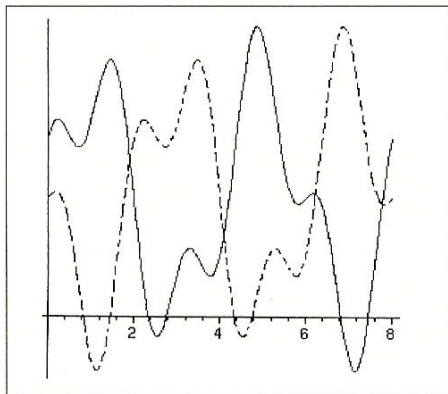
Kanon je lahko napisan v strogi (striktni) ali v prosti obliki. Stroga oblika se mora podrežati dvema zahtevama: drugi (oziroma vsak naslednji) glas mora biti natančna ponovitev prvega (oziroma prejšnjega) glasu in vstopiti mora za prvim (oziroma prejšnjim) glasom. V prosti obliki so dovoljene različne modifikacije in glede na to imajo prosti kánoni različna imena.

- Pri *zrcalnem kánonu* 2. glas odgovori z melodijo, ki je vodena v nasprotni smeri, kot jo prinese 1. glas.

Najstarejši ohranjeni primer komponiranja v tej tehniki, ki ga hranijo v Oxfordu, je rokopis dvoglasne himne *Nunc Sancte nobis spiritus* iz 12. stoletja, drugi najstarejši primer pa je triglasni *Benedicimus Domino* iz 13. stoletja, ki ga hrani Biblioteca Mediceo Laurenziana v Firencah. Skladatelji so kmalu presegli okvir strogega kánona in že okoli leta 1400 se je pojavil prvi primer rakovega kánona. V tem času je ta tehnika prodrla že v vse oblike cerkvene glasbe in do prvega razcveta so jo pripeljali

najvidnejši predstavniki srednjeveške glasbe Guillaume Dufay, Jean Ockeghem in Josquin des Pres. Vrhunsko tehniko v skladanju kánonov pa je v glasbenem baroku dosegel nemški skladatelj, dirigent, čembalist in organist J. S. Bach (1685–1750) z deli *Goldbergove variacije*, *Glasbena daritev* in s kanoničnimi variacijami na temo *Vom Himmel hoch*.

Kot najstrožja glasbena oblika je kánon oz. njegova struktura idealen za matematično analizo. Za primer vzemimo 2 glasova kánona *Mojster Jaka*, katerega osnovna melodija traja 8 taktov. Prvi oz. vodilni glas (imenovan tudi dux, antecedens ali proposta) bomo matematično opisali z eno barvo krivulje v koordinatnem sistemu, drugi glas (comes, konsekvens ali risposta) pa z drugo barvo. Vodoravna os koordinatnega sistema bo pomenila časovno os, na navpično os pa bomo nanašali višino tona. Z (izmišljeno) neprekinjeno krivuljo oz. z grafom funkcije f ponazorimo 1. glas kánona, s prekinjeno krivuljo, ki je graf funkcije $g(t) = f(t - 2)$ oz. po vodoravni osi za 2 enoti v desno premaknjeni graf funkcije f , pa opišemo 2. glas kánona.



Iz grafa se lepo vidi, da 2. glas vstopi po dveh taktih izvajanja prvega glasu in samo ponovi njegovo melodijo. Matematično bi temu rekli translacija grafa $y = f(t)$ za vektor $\vec{a} = (2, 0)$. Ker je translacija ena izmed togih transformacij, lahko z njo natančno opišemo melodijo, ki jo 2. glas ponovi za prvim. Funkciji f in g sta periodični s periodo 8, saj se melodija ponovi vsakih 8 taktov.

Zanimivejše so analize prostih kánonov, kjer lahko uporabimo zahtevnejše matematične transformacije. Ogledali si bomo analize štirih Bachovih (prostih) kánonov iz zbirke *Musicalische Opfer* (Glasbena daritev), za konec pa še

kánon s posebnim posvetilom. Pri analizah kánonov bomo zaradi enostavnosti in preglednosti za ilustracijo melodične linije uporabljali kar graf iz prejšnjega primera – za 1. glas bo torej krivulja neprekinjena, za 2. glas pa črtkana.

Primer 1. Drugi kánon iz omenjene zbirke ima zelo preprosto strukturo in je na las podoben kánonu *Mojster Jaka*. Prvi glas obsega melodijo iz 8 taktov, drugi glas pa nastopi že v 2. taktu. Bach je predvidel še tretji, spremljevalni glas v spodnjem delu partiture s »kraljevsko temo«, ker je kánon pač posvetil kralju. Zato lahko ta kánon uvrstimo med t. i. spremljane kánone. Ker drugi glas vstopi z isto melodijo na istem tonu na začetku 2. takta (oz. takoj po prvem taktu), lahko zapišemo:

$$g(t) = f(t - 1).$$

Struktura kánona se še lepše vidi iz grafov, ki ponazarjata prvi in drugi glas.

Primer 2. Tudi peti kánon spada med spremljane kánone. Tokrat je harmonična spremljava postavljena v zgornji del partiture z modificirano »kraljevsko temo«. Drugi glas v kánonu zaostane za prvim za en takt, vendar ne ponovi melodije na istem tonu, ampak za kvinto (3,5 tona) višje, kar je Bach v notnem zapisu nakazal z dodatnim glasbenim ključem v spodnjem delu partiture. Zato je to primer translacije prvega glasu za vektor $\vec{a} = (1, k)$, kjer 1 pomeni premik za en takt v desno po vodoravni osi, k pa premik za kvinto navzgor po navpični osi. Tako lahko drugemu glasu kánona priredimo graf funkcije:

$$g(t) = f(t - 1) + k.$$

Primer 3. Kánon št. 1 je *rakov ali retrogradni kánon*, kjer tako prvi kot drugi glas obsegata 18 taktov. Ker drugi glas začne hkrati s prvim, le melodična linija je od zadaj brani prvi glas, gre matematično gledano za obliko toge transformacije, ki ji rečemo zrcaljenje:

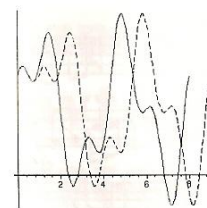
$$g(0) = f(18), g(1) = f(17), \dots, g(18) = f(0).$$

Os zrcaljenja je sredina 9. takta, drugemu glasu kánona pa ustreza graf funkcije:

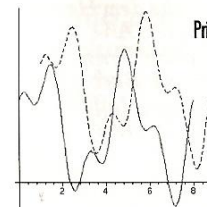
$$g(t) = f(18 - t).$$

Bach je notni zapis tega kánona opremil tako, da je na njegov konec postavil narobe obrnjen glasbeni ključ in tako nakazal način izvedbe.

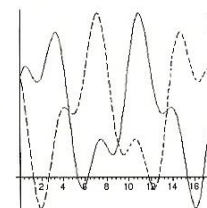
Primer 4. Analiza kánona št. 4 iz zbirke zahteva največ matematičnega znanja, saj si je Bach pri njegovem skladanju privoščil kar pre-



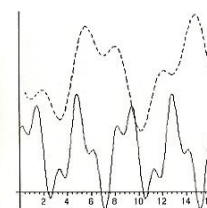
Primer 1



Primer 2



Primer 3



Primer 4



cej svobode. Drugi glas ponovi melodično linijo prvega glasu zrcalno, še enkrat počasneje in za terco višje; poleg tega je kánonu dodana spremljava z modificirano »kraljevsko temo«, ki leži med prvim in drugim glasom. Bach je partituro opremil z na glavo obrnjenim violinskim ključem, s čimer je nakazal, da mora 2. glas melodijo izvajati zrcalno. Z dodatnim navodilom »per augmentationem contrario motu« pa je opisal proporcionalnost kánona. Drugi glas vstopi pol takta za prvim glasom in to nad spremljevalno »kraljevsko temo«. Tokrat melodije 2. glasu ne moremo opisati le s togimi transformacijami prvega glasu, saj 2. glas ponovi zrcalno melodijo enkrat počasneje. Zato velja:

$$g(2) = f(1), g(4) = f(2) \text{ itd.}$$

Ker je melodija 2. glasu zrcalna, moramo funkcijo, ki opisuje 1. glas, pomnožiti z -1 . Drugi glas začne pol takta za prvim glasom, kar pomeni, da je graf funkcije f premaknjen po abscisni osi za $1/2$ v desno. Proporcionalnost pokažemo tako, da argument funkcije delimo z 2. Zaradi vstopa 2. glasu terco nad prvim tonom 1. glasu premaknemo graf za h navzgor po navpični osi. Po vseh teh transformacijah dobimo funkcijo g , ki opisuje 2. glas kánona s pomočjo funkcije f , ki predstavlja 1. glas, takole:

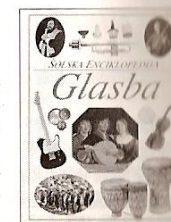
$$g(t) = -f((t - (1/2)) / 2) + h.$$

Celotni kánon obsega šestnajst taktov; v tem času prvi glas izvede svojo melodijo dvakrat, drugi glas pa enkrat.

Keith Spence

GLASBA

Ilustrirana zgodovina glasbe za mlade bralce. Glasbeni pregled zajema poglavja o ustvarjalcih glasbe, glasbenih zvrsteh, oblikah in slogih. Poudarek je na klasični, romantični in moderni glasbi. Popisani so vsi pomembni glasbeni instrumenti in vrste glasbenih gledališč; seznam 100 izbranih skladateljev, slovarček in obsežno kazalo pojmov. Upoštevani so tudi slovenski glasbeni ustvarjalci.



144 strani,
barvne risbe
in fotografije,
22 x 29 cm

CENA: 2.982 SIT

Cena za naročnike
revije ŽIT ali TIM: 2.386 SIT

Primer 5. Bach je – kot okras in najbrž tudi kot posebno zabavo – pri komponiranju pogosto uporabljal numerologijo. Lep primer je štiriglasni kánon z oznako BWV 1073 (nem. Bach Werke Verzeichnis 1073 – 1073. delo s seznama Bachovih znanih del), ki ga je posvetil daljnemu sorodniku in prijatelju Johannu Gottfriedu Waltherju, organistu v Weimarju. Posvetilo se glasi: *Ta skladbica je napisana za lastnika (tega zvezka) v ljubeč spomin. Joh. Sebast. Bach. Dvorni glasbenik in organist Princa Saškega.*

Če črkam nemške abecede priredimo številke, kot velewa gemetrija (ŽIT 1992/4, str. 52), iz besede WALTHER dobimo število 82, kar je obenem število vseh različnih višin tonov, ki jih je Bach uporabil v kánonu. Hkrati je to dvakratnik števila 21, ki ga dobimo iz črk J. S. BACH. Osnovna melodija kánona obsega 14 taktov ($B + A + C + H = 14$), začetni toni vstopov glasov v kánonu (bas, tenor, alt in sopran)



Weimar. den 2. Aug: 1713

*Dieses wenige wolte dem Herrn
Besizer zu geneigtem An-
gedencken hier einzeichnen
Joh: Sebast. Bach.
Fürstlich Sächsischer HoffOrg. v.
Cammer Musicus*

Primer 5

pa ustrezajo uglastvi strun na violi, tj. na instrumentu, ki ga je Bach igral v orkestru.

A 1, B 2, C 3, D 4, E 5, F 6, G 7, H 8, I 9, J 10, K 11, L 12, M 13, N 14, O 15, P 16, R 17, S 18, T 19, U 20, V 21, W 22, Z 23.

Danes kar težko razumemo, kako je Bachu ob tako številni družini in toliko napisanih glasbenih delih, da jih navaden smrtnik v vsem življenju še prepisati ne more, uspelo svojo sijajno glasbo na nek način povezati tudi z matematiko. To je doslej uspelo res le redkim genijem.

the Bach Connection
Johann Sebastian Bach (1685-1750)

TO LISTEN TO A SEQUENCE CLICK ON THE TITLE

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

that work!!!

MUSICAL OFFERING MICHELE TOMATORE

N°1 Ricercare a 3 (22k)
N°2 Canon Perpetuus (4k)
Canon 2 Super Thema Regium (3k)
Canon a 2 violini all'unisono (5k)
Canon a 2 Per Motum contrarium (4k)
Canon a 2 Per augmentatione contrario motu (7k)
Canon a 2 Per Tonos (10k)
Fuga Canonica in Epidapente (9k)
N°5 Ricercare a 6 (25k)

N°6 Canon a 2 (3k)
Quaerendo invenietis 1 (4k)
Quaerendo invenietis 2 (5k)
Quaerendo invenietis 3 (4k)
N°7 Canon a 4 (16k)
Sonata - Largo (25k)
Sonata - Allegro (50k)
Sonata - Andante (10k)
Sonata - Allegro (26k)
N°9 Canon Perpetuus (10k)



BACH, JOHANN SEBASTIAN
(1685–1750)

Bralci, ki imajo računalnik z vgrajeno zvočno kartico in priključek za internet, lahko vse v tem prispevku omenjene kánone iz zbirke *Glasbena daritev* poslušajo v elektronski obliki (oz. z midi-kakovostjo zvoka) na naslovu: <http://midiworld.com/cmc/bach.html>.