

V ritmu Fibonaccija

Na otokih indonezijskega arhipelaga živi peti najštevilčnejši narod na svetu. Kljub nepovezanosti ozemlja in mnogim regionalnim posebnostim prebivalce Indonezije družijo posebna tradicionalna glasbena zvrst – gamelanski ritmi. Veliko mlajši, a kljub temu star že približno 100 let, je podoben ritem, ki ga je proslavil Scott Joplin s skladbo Maple Leaf Rag, pojavlja pa se tudi pri skladateljih resne glasbe. Vzorci teh ritmov so zanimivi za pesnike in glasbenike, pa tudi za matematike, saj so neverjetno v sorodu s členi Fibonaccijevega zaporedja.

Vera in Gregor Pavlič

Čeprav je gamelanska glasba starejša kot slavni srednjeveški matematik Fibonacci, začnimo pri slednjem. Že iz imena je mogoče sklepati, da je bil Fibonacci oziroma Leonardo Pisano (1180–1250) doma iz italijanske Pise in da se je rodil očetu Bonacciju (lat. filius Bonacci – Bonaccijev sin). Oče Bonacci je bil trgovec in nekaj časa celo upravitelj trgovske postojanke v Bugiji v Alžiriji. Ker je na potovanja



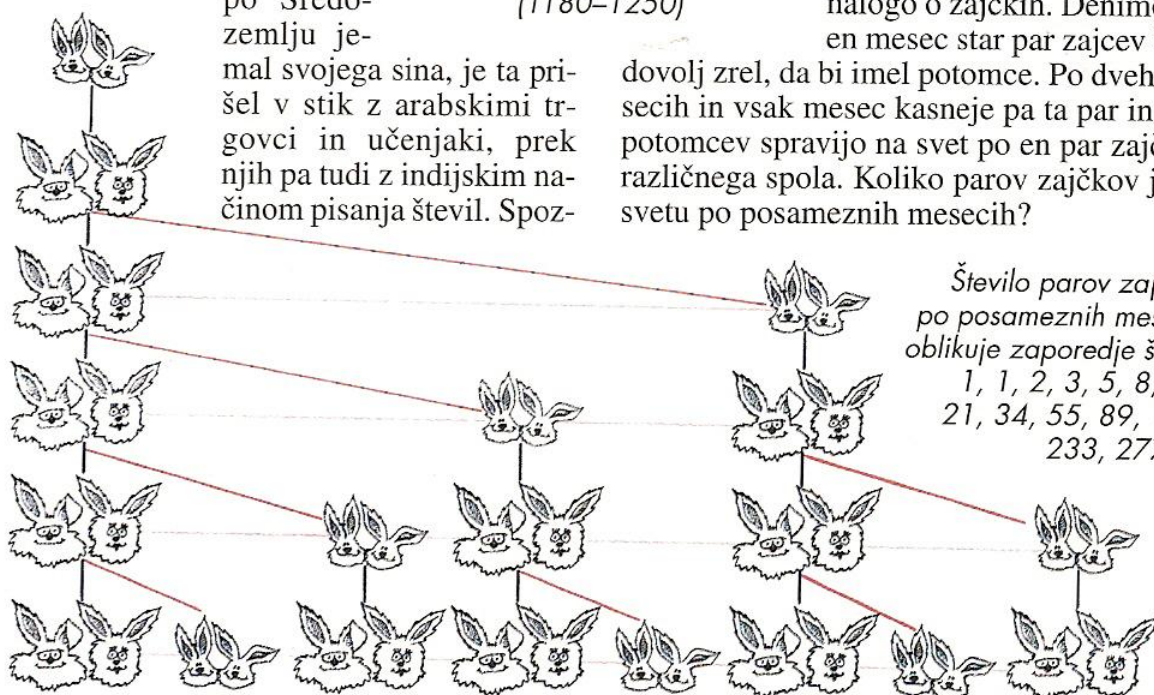
Fibonacci oz. Leonardo Pisano (1180–1250)

po Sredozemlju jemal svojega sina, je ta prišel v stik z arabskimi trgovci in učenjaki, prek njih pa tudi z indijskim načinom pisanja števil. Spoz-

nal je njegovo vrednost in leta 1202 napisal knjigo *Liber Abaci* (Knjiga o računanju), ki pa seveda ne opisuje računanja s klasičnim računalom abakom, kot bi kdo lahko sklepal po naslovu. Ta knjiga na 459 straneh (ohranjena je druga izdaja iz leta 1228) je indijskim števkam odprla pot v srednjeveško Evropo, čeprav so jih v celoti sprejeli šele v 16. stoletju.

V omenjeni knjigi je Fibonacci zapisal tudi znamenito nalogo o zajčkih. Denimo, da en mesec star par zajcev še ni

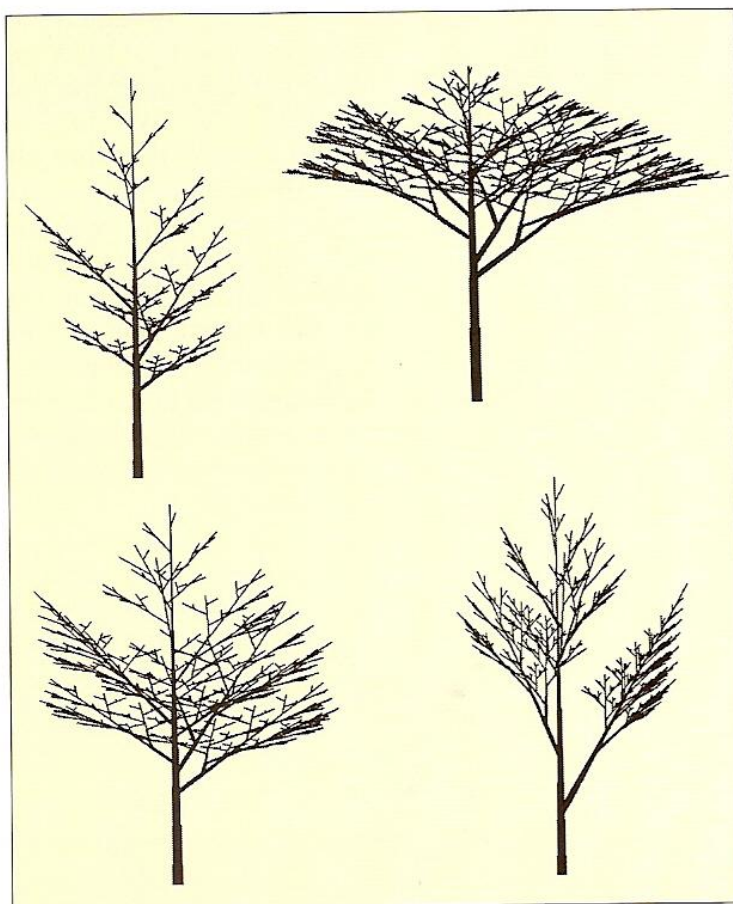
dovolj zrel, da bi imel potomce. Po dveh mesecih in vsak mesec kasneje pa ta par in pari potomcev spravijo na svet po en par zajčkov različnega spola. Koliko parov zajčkov je na svetu po posameznih mesecih?



Število parov zajčkov po posameznih mesecih oblikuje zaporedje števil:
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,
21, 34, 55, 89, 144,
233, 277, ...

Na začetku prvega meseca je na svetu očitno en sam par, na začetku drugega meseca še vedno en sam par, po dveh mesecih dva para (prvi par je prvič imel potomca), po treh mesecih trije pari - najstarejši par je spet imel par potomcev, drugi par pa še ni bil zrel za to, itn. Nadaljnji razvoj zajčje družine si raje pogledimo na sliki.

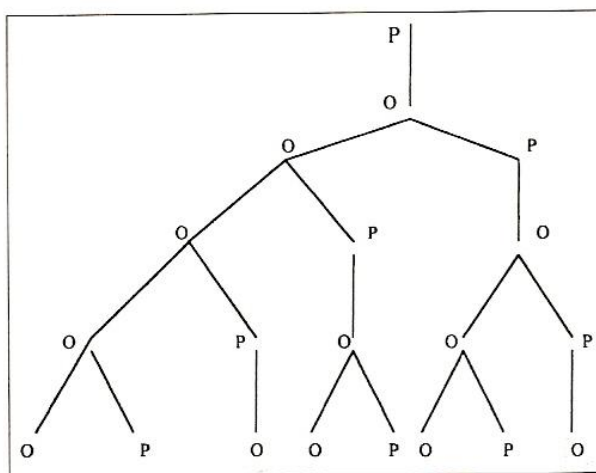
Zaporedje števil zajčjih parov po posameznih mesecih (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 277, ...) lahko zapišemo tudi z rekurzivno formulo $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, pri čemer je $F_1 = 1$, $F_2 = 1$. Nobenega podatka ne poznamo, iz katerega bi lahko sklepali, da je Fibonacci kaj bolj natančno raziskoval to zaporedje. Pač pa je to zaporedje (ko še ni imelo tega imena) vzbudilo zanimanje francoskega matematika Edouarda Lucasa (1841–1891), sicer strokovnjaka za teorijo števil in ljubitelja rekreacijske matematike. Zamislil si je zaporedje s podobno strukturo (1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, ...), ki se po njem imenuje Lucasovo zaporedje in ima rekurzivno formulo $L_{n+2} = L_n + L_{n+1}$, pri čemer je $L_1 = 1$, $L_2 = 3$.



Primeri uporabe L-sistemov za računalniško oblikovanje drevesnih struktur

Opisani model razmnoževanja zajčkov je le eden izmed mnogih modelov rasti, ki jih zadnja desetletja proučujejo in razvijajo biologi. Posebno pomemben med njimi je Aristid Lindenmayer (1925–1989), ki je prvo črko svojega priimka posodil za oznako t. i. L-sistemov, kot se ti modeli rasti imenujejo.

Podobno kot razvoj zajčje družine lahko opišemo rast drevesa, kjer iz odrasle veje odže-



Generacijsko drevo zajčje »družine«

ne nov poganjek, ki pa se mora najprej razviti v odraslo vejo. Oba modela opišemo z dvema praviloma:

1. Iz odraslega elementa O se razvije nov potomec P.
2. Iz potomca nastane nov odrasli element.

Formalizirani L-sistem za našo zajčjo družino se tako glasi:

$$\begin{aligned} O &\rightarrow O + P \\ P &\rightarrow O \end{aligned}$$

Temu modelu ustreza generacijsko drevo, iz katerega lahko preberemo število elementov »družine« po določenem številu generacij.

In kakšna je povezava med Fibonaccijevimi zajčki, poezijo in glasbo? Pred približno sto leti je limerik – šaljiva 5-vrstična pesmica – postal ena najbolj priljubljenih pesniških oblik. Ker pa je v njeni rahlo deformirani simetriji neka prvinska privlačnost, je dobila pomembno mesto tudi v popularni glasbi.

Približno v istem času, natančno leta 1899, je Scott Joplin napisal in izdal znamenito skladbo *Maple Leaf Rag*, zmes zahodne glasbene tradicije ter sinkopiranih ritmov Afrike in Južne Amerike. Izid znamenitega regtajma (ragtima) je bil začetek bliskovitega vzpona pop(ularne) glasbe; ta je danes najbrž edina planetarna vez, ki jo priznavajo vsi ljudje sveta.

Limerik in regtajm imata zelo podobno strukturo, ki jo lahko vidimo ter še lažje slišimo v porazdelitvi naglašanih in nenaglašanih



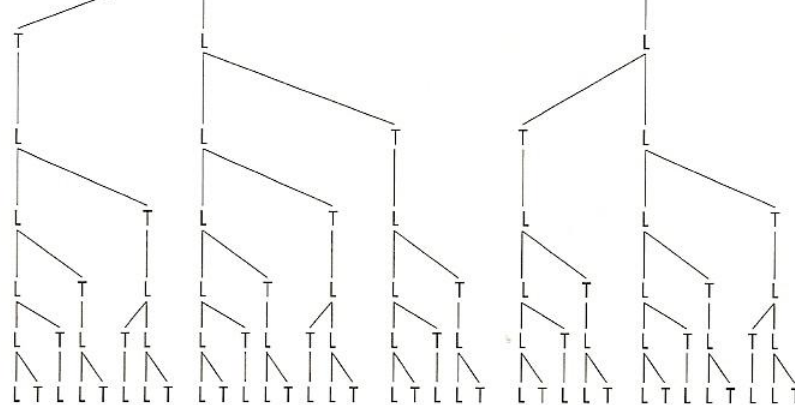
Množica je samopodobna oz. je fraktal, če je kateri koli del množice geometrijsko podoben celotni množici. Brokoli in cvetača sta lepa naravna primera samopodobnih množic.

nih zlogov. Ta ritmična struktura vsebuje elemente *samopodobnosti* – ali kot učeno rečejo matematiki: ima *fraktalno strukturo*.

Prišle so tri žene med nas,
 U – U U – U U –
 hotele zapeti naglas
 U – U U – U U –
 o svojih možeh,
 U – U U –
 ki vlečejo meh,
 U – U U –
 namesto na njivo bi šli.
 U – U U – U U –

(Mateja Gomboc)

Ta šaljiva pesmica je sestavljena iz 34 zlogov, od katerih je 21 naglašanih (–) in 13 nenaglašanih (U). Daljše vrstice imajo po 8 in krajše po 5 zlogov, daljše vsebujejo po 3 naglašene zloge in krajši vrstici po 2 naglašena zloga. Ko zapišemo vsa napisana števila od najmanjšega do največjega, dobimo: 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 oz. del Fibonaccijevega zaporedja.

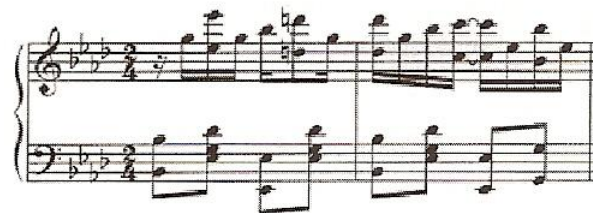


Drevesna struktura za limerik (T je naglašen, L pa nenaglašen zlog).

Podobno sliko nam da tudi ritmična struktura prvih dveh taktov Scottove skladbe *Maple Leaf Rag*. Zgornji del partiture za klavir se začne z nepoudarjeno dobo, sledi poudarjena, nato spet dve nepoudarjeni in poudarjena. Isti vzorec se nato ponovi še enkrat, fraza pa se zaključi z zaporedjem nepoudarjene, poudarjene in nepoudarjene dobe. Če si ritem predstavimo grafično, dobimo:

U – U U –
 U – U U –
 U – U

Od 13 zlogov je 8 nepoudarjenih in 5 poudarjenih, glasbena fraza pa vsebuje 3 vrstice, od katerih sta 2 daljši in 1 krajša.



V besedilu omenjeni del notnega zapisa Joplinove skladbe *Maple Leaf Rag*

Ko ta ritem primerjamo z ritmom limerika, ugotovimo, da je zelo podoben: v resnici je le malo krajši pri dolžini vrstic in po njihovem številu. Tu se spet pojavi že prej omenjena samopodobnost ali fraktalna struktura.

Zelo podobno strukturo ima tudi skladba *It ain't necessarily so* iz opere *Porgy and Bess* Georgea Gershwinja iz leta 1935. Čeprav ni nobenih dokazov, da je Gershwin preiščeno



Indonezijski (ali tudi javanski) gongi imajo obliko ponve.

uporabil opisani ritmični vzorec, je bil v tistem času najbrž neizogiben. Po svoje pa je k temu lahko pripomogel tudi glasbeni pedagog Joseph Schillinger, ki je s svojimi deli *System of Musical Composition* in *The Mathematical Basis of Arts* (v tem omenja tudi Fibonaccijevo zaporedje) močno vplival na ameriške glasbenike prve polovice 20. stoletja in je bil tudi Gershwinov mentor.

Podobnost med limerikom in regtajmom, pa tudi njuna fraktalna struktura se pokaže iz obeh generacijskih dreves z istim pravilom kot pri zajčkih, le z drugo interpretacijo, če poudarjeno dobo označimo s T (težka), nepoudarjeno dobo pa z L (lahka):

$$\begin{aligned} T &\rightarrow L \\ L &\rightarrow L + T \end{aligned}$$

Gamelanska glasba je prvotna glasba indonezijskega otočja. Sprva je spremljala priprošnje za dobro letino in obrede navezovanja stikov s predniki, v letih 500–1000 pa se je močno povezala s hinduizmom in budizmom. Ohranila se je skozi dolga stoletja in tako, kot ljudje povsod po svetu negujejo tradicijo, tudi gamelansko glasbo gojijo še danes. Zelo je priljubljena v Indoneziji, kjer se je lahko učijo v posebnih šolah, pa tudi drugod po svetu.

Gamelansko glasbo izvajajo ansambli, v katerih glasbeniki igrajo gonge, bobne in včasih tudi metalofone. Običajni ansambel sestavlja 4–5 gongov, ki so uglaseni na različne tone, ter 2 ali 3 bobni. V večjih ansamblih lahko igra tudi do 30 glasbenikov. Ansambli se razlikujejo po uglasitvi gongov in po ritmu igranja. Tradicionalna game-

lanska glasba je bila ritmično enostavna. Instrumenti z najvišjo intonacijo so igrali najhitreje oz. na vsako dobo, nižje uglaseni instrumenti vsako drugo dobo, še nižje uglaseni vsako četrto dobo itn. Največji in najnižje uglaseni gong je tako lahko zazvenel le vsakih 16 ali 32 udarcev najvišje uglasenega gonga.

Z leti se je ritmična struktura bogatila, tako da je danes precej bolj zapletena. Za primer pogledjmo ritmično shemo igre ansambla iz vzhodne Indonezije:

- gong *vela* zazveni na 2., 4., 6. in 8. dobo,
- gong *uto-uto* na 1., 3., 5. in 7. dobo,
- gong *dhere* na 2., 3., 6. in 7. dobo,
- prvi gong *doa* zazveni na 4. dobo,
- drugi gong *doa* pa na 2., 5. in 8. dobo.

Struktura ritma se iz enostavnega (binarnega) pomika proti obrazcu, ki smo ga spoznali že pri limeriku in regtajmu. Če le dva splošna udarca – dolgo dobo D in pol krajšo kratko dobo K – definiramo s pomočjo formule

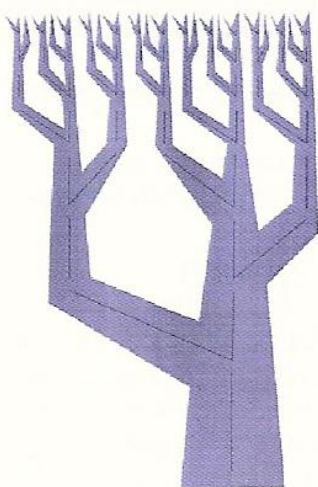
$$\begin{aligned} K &\rightarrow D \\ D &\rightarrow D + K, \end{aligned}$$

dobimo naslednjo ritmično strukturo, ki jo lahko igra 7 glasbenikov:

D	K	D	D	K	D	K	D	D	K	D	D	K	D	K	D	D	K	D	K	D
	D		K		D		K		D		K		D		K		D		D	K
		D		K		D		K		D		K		D		K		D		K
			D		K		D		K		D		K		D		K		D	K
				D		K		D		K		D		K		D		K		D
					D		K		D		K		D		K		D		K	D
						D		K		D		K		D		K		D		K



Značilna zasedba gamelanskega ansambla

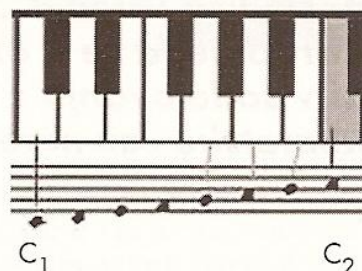


Drevesna struktura, ki bi jo dobili, če bi igralo 8 glasbenikov

Ritmična shema je enaka, kot smo jo spoznali pri limeriku. V njej lahko prepoznamo obliko pravega drevesa. Podoben razvoj kot gamelanski ritmi je naredila tudi evropska glasba. Klasična 4- ali 8-taktna oblika, ki je stoletja prevladovala v evropski glasbi in poeziji, in v kateri so komponisti 4- ali 8-taktne fraze zlahka kombinirali v 16-taktne enote, se je na začetku 20. stoletja začela rahljati. Muzikologi so Fibonaccijevo zaporedje in z njim močno povezan zlati rez odkrili pri znanih komponistih Debussyju, Bartoku in Satieju. Ti so se pri komponiranju precej naslanjali na narodno glasbo oz. folkloro in na ta način skušali razbiti monotono binarno formo (2-, 4-, 8- in 16-taktne enote).

Na koncu omenimo še eno povezavo med

glasbo in Fibonaccijevim zaporedjem, ki je vidna pri vseh inštrumentih s tipkami. Običajna temporirana durova lestvica je sestavljena iz 12 tonov, med katerimi so male sekunde (pol tona). Od npr. tona c_1 do vključno tona c_2 je torej 13 tipk; 8 je belih in 5 črnih, črne tipke pa so v skupinah po 3 in 2.



Ena oktava običajne durove lestvice (od tona C_1 do tona C_2)

LOKALNA TELEVIZIJA
STUDIO
SIGNAL
LOKALNA TELEVIZIJA

Celovška 150, 1000 Ljubljana
<http://studio-signal.skyline.si>
 E-mail: studio-signal@skyline.si
 01/515-80-10, 515-52-02
 Fax: 01/515-80-15

http://...

glue.umd.edu/~satu/gamelan/ (spletne strani, povezane z gamelansko glasbo)

www.gamelan.org/ (Ameriški inštitut za gamelansko glasbo)

www.medieval.org/music/world/java.html (gamelanska glasba z otoka Java)

www.fsu.edu/~musicps/events/gam.html (Univerza Florida; šola gamelanske glasbe)

www.tunasmekar.org/listen.html (posnetki gamelanske glasbe)

joglosemar.co.id/gamelan.html (fotografije inštrumentov za izvajanje gamelanske glasbe)

www.mes.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibInArt.html (povezava med zlatim rezom, umetnostjo, arhitekturo in glasbo)