

Postaviti vse na kocko

Drobno oglatelo telo pravilnih oblik, imenovano tudi heksaeder, s šestimi stranskimi ploskvami, poslikanimi s pikami, je v zgodovini ljudem prineslo veliko užitka, pa tudi veliko gorja. Marsikdo je v igralni vročici stavil vse – in dobil ali izgubil. Igralna kocka pa je v 16. stol. postala tudi predmet proučevanja matematikov in porodila novo matematično disciplino: verjetnostni račun.

Vera in Gregor Pavlič

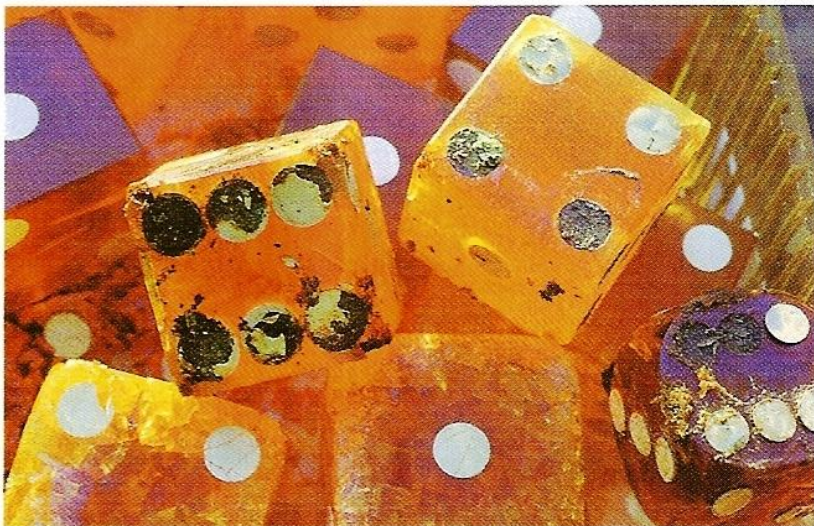
Leta 1984 so na zahodnem bregu Temze pri znamenitem mostu London bridge iz blata izkopali malo kositrno posodo. Najdba ni bila naključna, saj jo je z detektorjem kovine odkril moderni »mudlark« (v slengu fant, ki čisti rečni breg). Nekateri od teh fantov so bili v prejšnjem stoletju znani po povezanosti z ladijskimi skladiščniki, ki so na določenih vnaprej znanih mestih z ladij odmetavali tovor. To blago so fantje potem prodali in izkupiček delili s skladiščniki. Danes je Society of Thames Mudlarks (Združenje čistilcev nabrežij) ugledna organizacija, priznana od londonskih pristaniških oblasti. Iz bregov Temze so izkopali že na tisoče malih predmetov: od zaponk in kovancev do kraljevega prstana iz 17. stol.

Izkopana kositrna posoda ni bila kar tako. Bila je okrašena z dvoglavim orlom in antikvarji so ugotovili, da je proti koncu 15. stol. služila kot krmilna posoda v ptičji kletki. To-

da namesto semen so v posodi našli 24 igralnih kock. Rentgenska analiza je pokazala, da so bile kocke last prevejanega profesionalnega kockarja. Kar 18 kock je bilo namreč navrtanih in obteženih s kovino. Lastnik kock je bil najverjetneje član združbe, imenovane »fulhams«, o kateri se je govorilo, da je središče nedovoljene igralniške dejavnosti, delovala pa naj bi na rečnih ladjah. Enajst kock je bilo obteženih tako, da so nekatere najbolj pogosto pokazale 5 ali 6 pik – neopazno so imele vdolane tri tanke žile živega srebra –, druge pa so bile injicirane z dvema žilama in so največkrat pokazale 1 ali 2. Preostale kocke niso bile obtežene, vendar so bile za goljufanje prirejene na drugačen način. Tri so bile dvojno označene le s 4, 5 in 6 pikami (naenkrat se iz določenega mesta vidi le tri stranske ploskve kocke); te kocke so popularno imenovali »high men«. Preostale tri kocke pa so bile »low men« in so imele na stranskih ploskvah dvojne cifre 1, 2 in 3.

Posoda, v kateri so hranili kocke, je bila prirejena tako, da se je s pritiskom na pokrov nepredušno zaprla in so goljufivo napravo v primeru nevarnosti ali odkritja lahko vrgli čez ladijski krov. Danes posodo s kockami hranijo v londonskem muzeju.

Iznajdba igralne kocke je zavita v skrivnost, kar ni čudno, saj naj bi jo poznali in se zabavali z njo že pred več kot 5000 leti. Res še ni imela natančno take oblike kot danes,



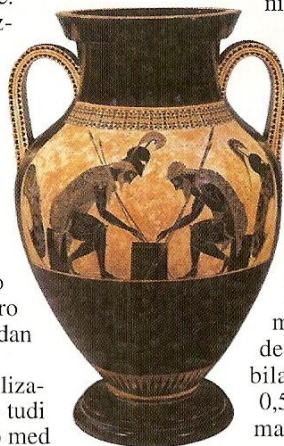
Igralne kocke, ki so jih našli na bregu Temze

imela pa je isto vlogo. Najstarejše predhodnice današnjih igralnih kock so »astragali« – drobne kosti gležnja dvoprstega kopitarja, ki so s sklepom povezane s piščaljo (tibia) in tvorijo gleženj. Te kosti imajo 6 stranskih ploskev, od katerih so štiri ravne in so po vsej verjetnosti služile za igro. Astragale so uporabljali stari Egipčani že 3500 let pr. Kr. Najpogosteje so uporabljali ovčje kosti, najbolj cenjene pa so bile kosti antilope.

Po Platonu naj bi kocko iznašli bogovi, bolj natančno egipčansko božanstvo Tevta, po neki drugi razlagi pa naj bi jo odkril Palamed, grški junak pred Trojo, ki je bil znan po izredni bistroumnosti. Njegovi vojaki naj bi si med obleganjem Troje krajšali čas z »metanjem kosti«. Grški zgodovinar Herodot pripisuje iznajdbo praktičnim Lidijcem, ki so z igro blažili hudo lakoto: vsak drugi dan so jedli, vmes pa so kockali.

V resnici so vse zgodnje civilizacije poznale igre na srečo, tako tudi stari Rimljani. Igralne kocke so med drugim našli pri izkopavanjih v tragično zasutih Pompejih in Herkulaneumu. Rimski cesarji Avgust, Komod, Kaligula in Neron so bili prav obsedeni s kockanjem. Klavdij, strastni hazarder, je o tej igri celo napisal razpravo, ki pa se ni ohranila. Bil je tako zasvojen, da je imel na svojem potovalnem vozu vgrajeno posebno mizo, ki je omogočala igranje tudi na najbolj slabih poteh, v eni sami igri pa je bil sposoben postaviti tudi bajnih 400.000 sestercev. Iz vseh zgodovinskih poročil je vidno, da se kocka ni držala le malih prevarantov, ampak so jo z veseljem metali tudi vladarji. Norveški kralj Olaf Haraldson je v 11. stol. na kocko postavil kar celo kraljestvo, v času francoskega kralja Henrika IV. pa je bil njegov dvor dobesedno obnoren od kockanja.

Sčasoma so se pri tej igri pojavile tudi goljufije, oz. obtežene kocke, zato je bilo kockanje v 16. stol. kar sinonim za goljufanje. Leta 1545 je izšla razprava *Toxophilus*,



Grška vojaka pri igri



Stenska slika prikazuje Rimljanke pri kockanju z astragalom.

v kateri je avtor Roger Ascham naštel in opisal vse mogoče načine goljufanja pri kockanju. Najbolj razvpito razpravo o kockanju je leta 1654 povzročil galantni francoski vitez in znani hazarder Antoine Gombauld de Méré. Njegova posebnost je bila stava, da bo v štirih zaporednih metih kocke šestica padla vsaj enkrat. De Méré je pri tej stavi vztrajno dobival in kopičil bogastvo, dokler se stave ni naveličal in spremenil pogojev igre. Odtlej je stavil, da bosta dve kocki v 24 zaporednih metih obe vsaj enkrat pokazali 6 pik. Po tej »spremembi pravil« so se stvari začele obračati na slabše in kazalo je, da ga je sreča povsem zapustila. V obupu se je s pismom obrnil na tisti čas najbolj znanega francoskega matematika

Blaisa Pascala, ki je s problemom seznanil tudi kolega Pierra de Fermata. Izračunala sta, da je bila verjetnost zmage v prvi stavi 0,52 oziroma 52 %, v drugi stavi pa manj od polovice, zato je vitez na dolgi rok oziroma v mnogo igrah izgubil. Pascal se je v pismu Fermatu čez viteza obregnil z besedami: »Je zelo inteligenten, vendar je slab matematik; to pa je, kot veste sami, velika pomanjkljivost«.

Pascal in Fermat pa se nista ukvarjala le z računanjem verjetnosti zmage pri določenih stavah, ampak tudi s problemom delitve stave v primeru, da se igra (iz kakršnega koli razloga) ni končala. S to nalogo so se že prej



Blaise Pascal (1623–1662)



Pierre de Fermat (1601–1665)

spopadali mnogi italijanski matematiki iz obdobja renesanse, vključno s Pacioliem, Cardanom in Tartagliom, vendar niso našli zadovoljive rešitve. Fermat je do nje skušal priti s preštevanjem vseh možnih primerov zaključka igre in ugotavljanjem, kateri od teh bi bili ugodni za posameznega igralca. Ker je postalo preračunavanje z naraščajočim številom iger vedno bolj zamudno, je Pascal ubral drugo pot. V *Razpravi o aritmetičnem trikotniku* (*Traité du triangle arithmétique*) je pojasnil povezavo med številni aritmetičnega (Pascalovega) trikotnika in rešitvijo zastavljenega problema.

Izračunanih prvih šestih potenc dvočlenika $(a + b)$:

$$(a + b)^0 = 1$$

$$(a + b)^1 = 1 a + 1 b$$

$$(a + b)^2 = 1 a^2 + 2 ab + 1 b^2$$

$$(a + b)^3 = 1 a^3 + 3 a^2 b + 3 ab^2 + 1 b^3$$

$$(a + b)^4 = 1 a^4 + 4 a^3 b + 6 a^2 b^2 + 4 ab^3 + 1 b^4$$

$$(a + b)^5 = 1 a^5 + 5 a^4 b + 10 a^3 b^2 + 10 a^2 b^3 + 5 a b^4 + 1 b^5$$

.....

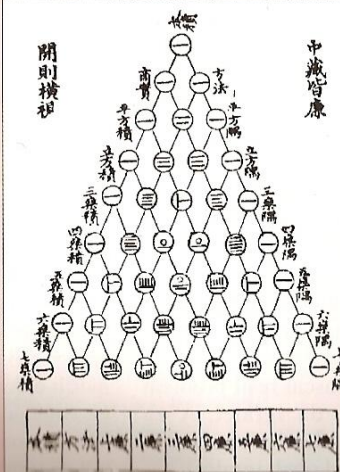
Koeficienti izračunanih potenc, zapisani v trikotno shemo:



Vsa števila na robu Pascalovega trikotnika so enaka 1, vsako drugo število v Pascalovem trikotniku pa je vsota dveh nad njim. Trikotnik ima tudi simetrijsko os, ki gre skozi njegov vrh – simetrično ležeča števila iz trikotnika so namreč enaka.

Številski trikotnik se po Pascalu imenuje zato, ker je o njem napisal razpravo, ki pa je izšla šele leta 1665, torej že po njegovi smrti. Bolj pošteno bi to številsko shemo imenovali kitajski trikotnik, saj ga je do 7. vrstice poznal že Jang Hui v 13. stol., do 9. vrstice pa Ču Ših Cih, ki je razpravo o njem napisal leta 1303. Pascalov trikotnik v sebi skriva še druge zanimive lastnosti: naravna, trikotniška, tetraedrska števila in Fibonaccijevo zaporedje.

圖方藥七法古



Kitajski trikotnik

Vsaka vrstica Pascalovega trikotnika je sestavljena iz števil, ki so koeficienti izračunanih naravnih potenc dvočlenika. Tretjo vrstico Pascalovega trikotnika sestavljajo števila 1, 3, 3, 1, ker tretjo potenco binoma zapišemo:

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3.$$

A	B
+	-
+	-
+	-
+	-

A	B
+	-
+	+
+	+
-	+

A	B
+	-
+	-
-	+
+	-

A	B
+	-
-	+
+	-
+	-

A	B
-	+
+	-
+	-
+	-

A	B
+	-
+	-
-	+
-	+

A	B
-	+
+	-
+	-
-	+

A	B
-	+
-	+
+	-
+	-

A	B
+	-
-	+
+	-
-	+

A	B
-	+
+	-
-	+
+	-

A	B
+	-
-	+
-	+
+	-

A	B
+	-
-	+
-	+
-	+

A	B
-	+
+	-
-	+
-	+

A	B
-	+
-	+
+	-
-	+

A	B
-	+
-	+
-	+
+	-

A	B
-	+
-	+
-	+
-	+

Drugo število v tej vrstici je 3 in pomeni, da nam produkt a^2b da naslednje tri kombinacije: aab, aba in baa.

Oglejmo si, kako je Pascal rešil problem delitve stave. Recimo, da igralec A za končno zmago potrebuje dve igri, igralec B pa tri igre; potem eden od obeh igralcev zagotovo zmaga v najmanj 4 igrah. V 4. vrstici Pascalovega trikotnika so števila 1, 4, 6,

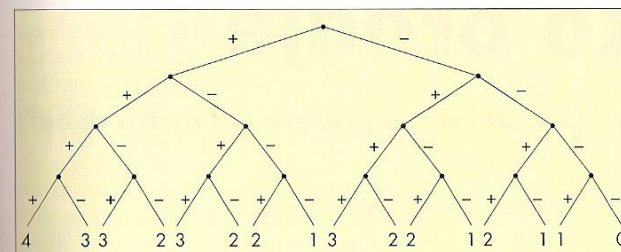
4, 1; z njihovo pomočjo izračunamo razmerje $(1 + 4 + 6) : (4 + 1) = 11 : 5$, v katerem morata igralca deliti nagrado. Razlaga je zelo preprosta, spada pa na področje kombinatorike.

Vseh mogočih izidov obeh igralcev pri štirih zaporednih igrar je 16:

Iz tabel je razvidno, da je le ena možnost, pri kateri A zmaga v 4 igrah, v 4 primerih zmaga trikrat, v 6 primerih dvakrat, v 4 primerih enkrat in v 1 primeru vse 4 igre izgubi. Situacija za igralca B je ravno obrnjena. Torej je od 16 možnih zaključkov 11 ugodnih za igralca A in 5 za igralca B, zato mora dobiček razdeliti v razmerju 11 : 5.

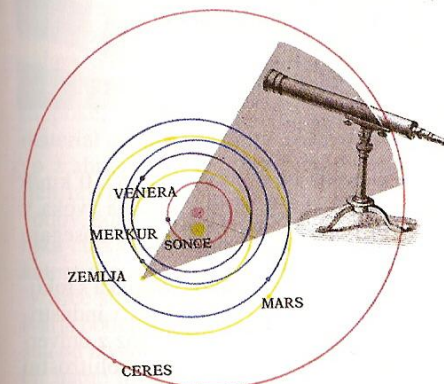
Še lepše se potek zaključka stave vidi iz

kombinatoričnega drevesa, v katerem za igralca A preštejemo vse zaključke krakov, ki vsebujejo vsaj dve zmagi, preostali kraki pa pripadajo igralcu B.



Kombinatorično drevo zadnjih štirih iger stave

V času Pascala in Fermata so v zvezi s srečo oziroma dobitki govorili le v razmerjih števil in še niso uporabljali besede »verjetnost«. Prvi, ki je verjetnost dogodka umestil med števili 0 in 1, je bil Jacob



Planetoid Ceres so astronomi odkrili leta 1801 in ga kmalu spet izgubili, ker je prišel v bližino Sonca. Gauss je naslednje leto z metodo najmanjših kvadratov pripomogel k ponovnemu odkritju njegove orbite le na podlagi skromnih podatkov iz opazovanj.

<http://...>

12.technion.ac.il/~shlomif/MathVentures/3d_outof_4d.html (igra s kockami)
www.shodor.org/interactivate/discussions/pd6.html (kocka in kombinatorika)
www.ecu.edu/si/cd/interactivate/activities/racing/index.html (igra z dvema kockama)
math.truman.edu/~thammond/history/Gambling.html (igre na srečo)
www.vegasgifts.com/partner.asp?REFERER=1356 (domača stran Las Vegasa)
www.luckydicecasino.com/ (simulacija igrar na srečo)
members.tripod.com/~american_almanac/ceres.htm (kako je Gauss odkril planetoid Ceres)

Bernoulli z razpravo *Ars Conjectandi*, ki je izšla leta 1713, torej že po njegovi smrti. Posebno pomembna je njegova ugotovitev, da verjetnost dogodka lahko napo-

vemo na podlagi njegove pogostosti v velikem številu ponovitev poskusa.

Razvoj teorije verjetnostnega računa se je bliskovito vzpel, ko se je pokazala njegova uporaba pri računanju višine polic življenjskega zavarovanja in v astronomiji.



Fotografija prikazuje observatorij v Göttingenu.

SLIKOVNI POJMOVNIK
MATEMATIKA
 Gregor Pavlič
 SLIKOVNI POJMOVNIK
MATEMATIKA
 Osnovni pojmi so sistematično definirani in razloženi s primeri, njihovo razumevanje pa olajšajo barvne ilustracije.
 (Dodatne informacije so v katalogu TZS 2002, str. 15)