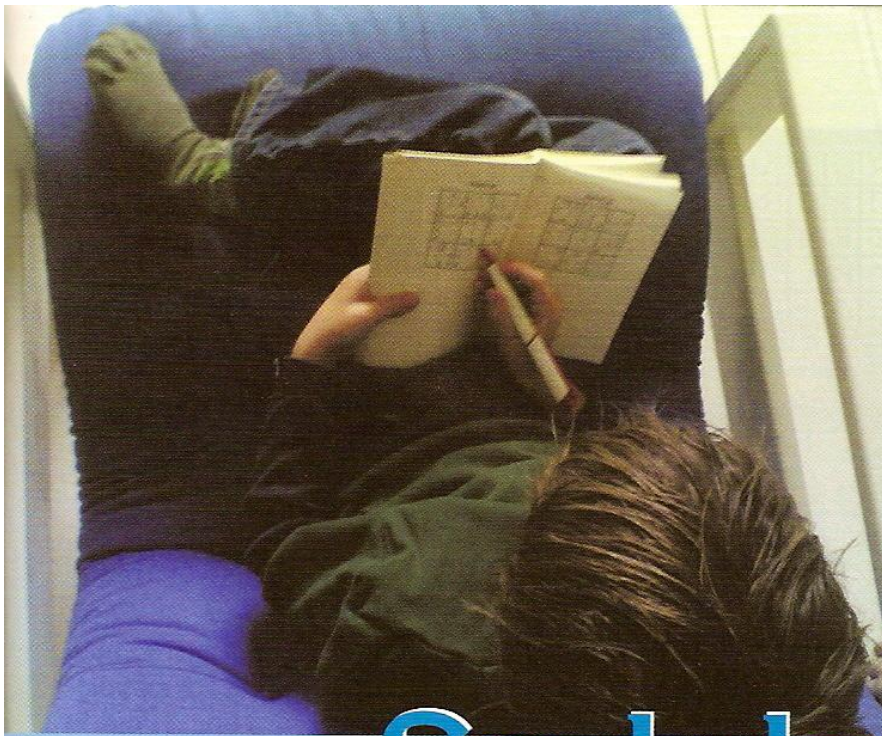




数独
sū doku

Sudoku – končno neka koristna manija

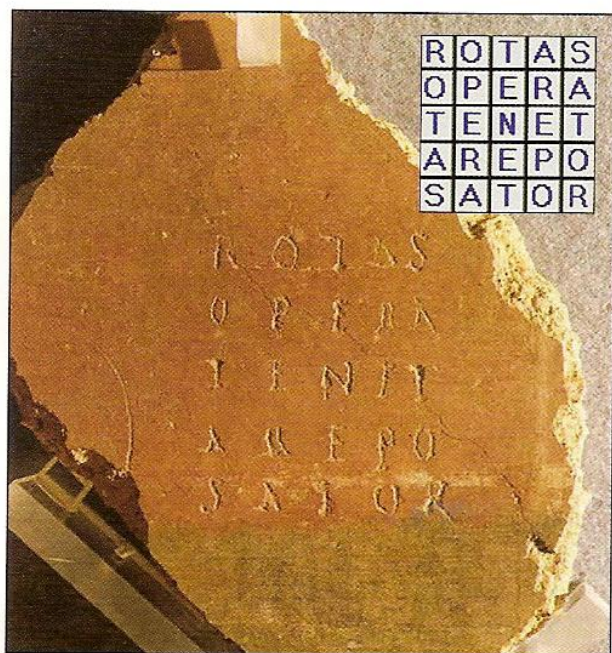
Leta 1986 je japonski ugankarski časopis *Monthly Nikolist* začel objavljati logične uganke, ki so v slabih dveh desetletjih obnorele ves svet. Tako v lanskem letu skoraj ni bilo države, kjer v kaki reviji ali časopisu ne bi redno objavljali problemov vrste sudoku. Najbrž večina ljudi ne ve, da korenine te igre, ki jo strokovnjaki danes v šolah priporočajo za razvijanje logičnih spretnosti učencev, segajo v 18. stoletje, in da je sudoku primer še nerešenega problema, ki ga že dolgo skušajo razvozlati najbolj slavni matematiki.

Gregor Pavlič

Sudoku je poseben primer latinskega kvadrata reda 9×9 . Latinski kvadrat reda $n \times n$ je kvadratna shema, v kateri nastopajo števila od 1 do n v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natančno enkrat. Latinski kvadrati so lahko različnega reda – od 1 naprej. Prvi se je z njimi resno ukvarjal eden največjih matematičnih genijev, Leonhard Euler, ki jim je tudi dal takšno ime.

*Švicarski matematik, fizik in astronom
Leonhard Euler (1707–1783)*





Latinskemu kvadratu zelo podobno shemo so našli napisano na steni kopališča v vili bogatega rimskega meščana v zasutih Pompejih. Posebnost besedila, ki v prostem prevodu pomeni »Sejalec Arepo pri delu drži plug«, je v tem, da ga lahko beremo v vseh štirih smereh (vodoravno in navpično).

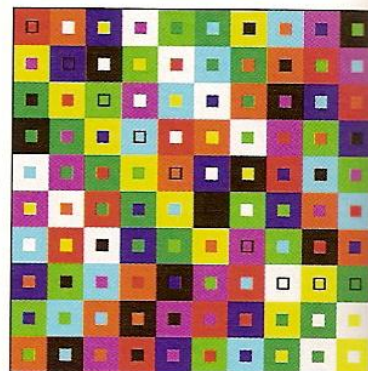
LATINSKI KVDRAT IN ABELOVA GRUPA

Za izračun števila različnih latinskih kvadratov posameznega reda potrebujemo precej logičnega sklepanja ali pa nekaj znanja kombinatorike. Očitno je latinski kvadrat reda 1 le eden, tudi pri redu 2 ni težav – obstajata dva različna, pri redu 3 pa je že nekaj več dela.

$$[1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Zamislimo si prazno razpredelnico kvadratne oblike s 3×3 polji. V posamezna polja moramo razvrstiti števila od 1 do 3 tako, da nastopajo vsa tri v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu natančno po enkrat. Denimo, da začnemo z najvišjim poljem prvega stolpca: vanj lahko razporedimo eno od treh števk, za kar imamo 3 možnosti. V spodnje polje lahko razvrstimo eno od preostalih dveh števk, za kar imamo 2 možnosti, za zadnje polje stolpca pa nam ostane le ena števka. Po osnovnem izreku kombinatorike je vseh razpo-

Elementi latinskega kvadrata so lahko črke, drugi simboli, pa tudi barve in vzorci.



redov toliko, kolikor je razvrstitev (permutacij) treh števil, to pa je $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Za izpolnitev zgornjega polja v srednjem stolpcu imamo zaradi pravil igre na razpolago le dve števki. Če izberemo npr. 3, moramo v srednje polje postaviti števko, ki ni 3 ali 1, zato je lahko le 2, v spodnje polje pa moramo postaviti 1. Vse možnosti za srednji stolpec sta tako le dve, medtem ko so številke v desnem stolpcu natančno določene že s pravili igre.

2		
1		
3		

2	3	
1	2	
3	1	

2	3	1
1	2	3
3	1	2

Ena od 12 možnih rešitev, ki jih dobimo pri razvrščanju treh različnih števil v latinskem kvadratu s 3×3 polji

Vseh latinskih kvadratov reda 3×3 je 12, latinskih kvadratov reda 4×4 pa je kar 576. Med njimi sta dva (Kleinov in ciklični četverček) posebnega pomena za abstraktno algebro – vejo matematike, ki se je začela razvijati v 19. stoletju. Razvrstitev števil v omenjenih dveh latinskih kvadratih določata dve dvočleni operaciji elementov množice $\{1, 2, 3, 4\}$, ki ji ma po zgledu množenja s števili rečemo kar »poštevanke«. Lastnosti obeh operacij lahko preberemo iz posamezne tabele.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Kleinov četverček (levo) in ciklični četverček (desno) sta primera Abelove grupe.

Množica $\{1,2,3,4\}$ z operacijo iz prvega kvadrata se imenuje Kleinov četverček in predstavlja t. i. Abelovo grupo (ime je dobila po norveškem matematiku Nielsu Henriku Abelu). Njena posebna struktura ustreza naslednjim zahtevam:

- Operacija je notranja: »produkt« katerih koli dveh elementov je spet element množice.
- V množici obstaja nevtralni element, podobno kot bi v množici celih števil množili z 1.
- Vsakemu elementu lahko najdemo natančno en inverzni element, ki pri množenju z njim da nevtralni element.
- Operacija je komutativna oz. vrstni red elementov v operaciji ni pomemben.

O zgornjih zahtevah se za Kleinov četverček ni težko prepričati: prva zahteva je očitno izpolnjena, saj so v tabeli le elementi od 1 do 4; nevtralni element je 1; vsak element je inverzen samemu sebi: $1 \circ 1 = 1$, $2 \circ 2 = 1$, $3 \circ 3 = 1$, $4 \circ 4 = 1$; komutativnost lahko vidimo iz simetričnosti tabele glede na glavno diagonalo. Zelo podobno lahko ugotovimo, da je ista množica $\{1,2,3,4\}$ pri operaciji »množenja po modulu 5« (števíli običajno zmnožimo in od produkta odštejemo mnogokratnik števila 5, da je rezultat število od 0 do 4) tudi Abelova grupa z imenom ciklični četverček. Nevtralni element je spet 1, inverzni elementi zapored pa so 1, 3, 2, 4 (1 in 4 sta inverzna sama sebi, 2 in 3 pa drug drugemu). Zaradi komutativnosti je tudi ta tabela simetrična glede na glavno diagonalo.

Na pogled in po imenu abstraktna matematika latinskih kvadratov se je kasneje izkazala za zelo uporabno tudi v drugih znanostih, predvsem pri raziskavah molekularne simetrije in pri spektroskopiji.

KRATKA ZGODOVINA IGRE SUDOKU

Rojstno leto igre sudoku je 1979, avtorstvo pripisujejo Howardu Garnsu, tedaj upokojenemu arhitektu in sestavljavcu ugank, ki je osnovno idejo dobil prav pri latinskih kva-



Norveški matematik Niels
Henrik Abel (1802–1829)

dratih Leonharda Eulerja, prvenstvo v objavljanju ima ameriška revija *Dell Magazines* iz New Yorka, ime pa je japonskega izvora in je okrajšava za *suji va dokušin ni kagiru*, kar naj bi v prostem prevodu pomenilo »uporabljamo lahko le številke«. Prvi računalniški program za re-

ševanje je bil dostopen na za sedaj že zgodovinskem računalniku Commodore 64 daljnjega leta 1986. Prodor igre sudoku v svet je tesno povezan z japonskim ugankarskim časopisom *Monthly Nikolist* in japonsko družbo Nikoli Co. Ltd., ki je zaščitila tako ime kot pravila. Pravi bum se je začel ob koncu prejšnjega tisočletja, ko je (spet!) upokojeni hongkonški sodnik Wayne Gould uganko opazil v japonski knjigarni, napisal program za njeno oblikovanje in ga ponudil urednikom britanskega *Timesa*, vedoč, da ima reševanje ugank na Otoku že dolgo zgodovino in da bi stvar lahko vžgala. Pod imenom »Codenumbrer« se je uganka dejansko bliskovito razširila še v druge britanske časopise in revije, od tam pa pod različnimi imeni po vsem svetu. V Sloveniji je lani izšla posebna knjižna izdaja o sudokuju, probleme redno objavlja mesečna revija *Modro razvedrilo* (prva številka *Devetka* je izšla leta 1999), od maja 2005 pa tovrstne uganke objavljajo tudi nekatere revije in dnevni časopisi.

Pravila reševanja uganke sudoku so preprosta. V kvadratni razpredelnici z 9×9 polji, razdeljeni na 9 manjših kvadratnih razpredelnic s 3×3 polji, so nekatera polja že izpolnjena s števkami – to so *podatki* –, vsa druga pa so prazna. Vanje je treba vstaviti številke od 1 do 9 tako, da je vsaka od razpredelnic 3×3 latinski kvadrat in da je tudi celotna razpredelnica 9×9 latinski kvadrat, kar pomeni, da v vsaki vrstici in v vsakem stolpcu nastopajo vse različne številke od 1 do 9. Ob tem za številke ne veljajo nobene aritmetične zakonitosti in bi jih lahko nadomestili s črkami, drugimi simboli ali celo z barvami.

Čeprav so pravila preprosta, pa reševanje zahteva precej kombinatoričnih spretnosti. Uganke so razvrščene po težavnosti v preproste, srednje težke in težke.

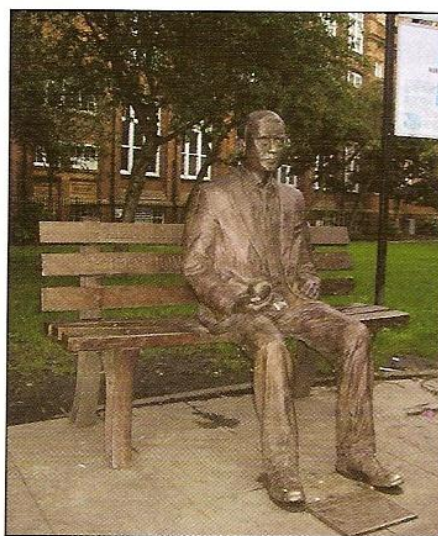
						1	8	4
4		2			6		5	
	9			8		2		
2				9			6	
	4						7	
	6			7				1
		7		6			1	
	3		2			5		8
8	1	9						

Primer uganke sudoku; vpisane številke so t. i. podatki. (Rešitev je objavljena na koncu tega prispevka.)

IZRAČUNLJIVOST

Pojav igre sudoku se je dotaknil tudi matematikov znanstvenikov, ki so ugotovili, da je teoretično iskanje števila rešitev igre sudoku *NP-problem*. Za osvetlitev najprej pogledjmo nekaj ozadja.

Za reševanje problemov matematiki uporabljajo postopke, ki se imenujejo algoritmi. Včasih algoritem teoretično obstaja, v praksi pa ni uporaben. Preprost primer takega algoritma je t. i. Eratostenovo sito za iskanje praštevil. Naravno število, za katero ne vemo, ali je praštevilo ali sestavljeno, moramo po vrsti deliti z vsemi števili, ki so manjša od $\sqrt{n}$, in ugotoviti morebitno deljivost ali nedeljivost. Na pogled zelo preprosto, v praksi pa neizvedljivo, saj bi za testiranje 50-mestnega števila izredno učinkovit računalniški program potreboval – verjeli ali ne – deset milijard let! Navedeni primer je zelo sodoben, saj v kriptografiji (tajnopisju) danes potrebujejo praštevila, ki imajo od 70 do 100 mest.



Angleški matematik in kriptograf Alan Turing (1912–1954)

Strategija

Najpreprostejša strategija je sestavljena iz kombinacije treh procesov: pregledovanja, označevanja in analiziranja. Edina pripomočka sta svinčnik in radirka.

Pregledovanje obsega dve osnovni tehniki: prečno prečrtavanje in štetje v posameznih blokih, vrsticah in stolpcih. V prikazanem primeru v prvem koraku opazimo, da se številka 5 pojavlja v 1. in 2. vrstici ter v 8. stolpcu, za-

5	3		7					
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Poleg obstoja algoritma je torej zelo pomembna tudi njegova učinkovitost, ki jo merijo s številom korakov, ki jih za rešitev problema naredi t. i. Turingov stroj. Ta hipotetična računska naprava, ki je dobila ime po

svojem avtorju Alanu Turingu, je sestavljena iz glave in neskončnega celičnega traku, pri čemer glava lahko naenkrat s trakom prebere znak ali ga nanj napiše. Celice na traku so lahko prazne ali pa vsebujejo znak neke »abecede«; najpreprostejša je kar tista z znakoma 0 in 1 (glava je v vsakem trenutku v enem od teh dveh stanj). Delovanje stroja poteka zaporedno po korakih, vsak korak pa je sestavljen iz treh različnih

reševanja ugank sudoku

to jih narahlo prečrtamo. Ob tem se izkaže, da v zeleno obarvano polje levo od številke 6 lahko vpišemo samo številko 5, saj sme biti po pravilu v vsaki vrstici in vsakem stolpcu le enkrat.

Ko s pomočjo pregledovanja ne moremo vpišati nobene številke več, pride na vrsto *označevanje*. V prazna polja vpišemo vse možne kandidate in jih ustrezno razvrstimo. Nekatera polja imajo lahko le po eno številko, kar je ugodno

za nadaljnje reševanje.

Sledi tretji del, *analiza*, pri kateri izločimo nepravilne številke. Na tej stopnji reševanje že prestopi iz natančnega dela v *hevristiko* (metoda »kaj če« oz. preizkušanje posameznih kandidatov). Če ne gre z izbranim kandidatom, ga izločimo in poskusimo z drugim.

Na koncu ostane le po ena neprečrtana številka – in to je že rešitev.

5	3	12	2	7	2	1	12	2
		4	6	4	8	4	8	4
6	2	2	1	9	5	3	2	2
	4	4				4	2	2
	7	7				7	8	4
12	9	8	23	4	2	1	3	2
						4	5	4
						7	7	7
8	12	12	5	6	1	4	4	2
	5	5	7	9	4	7	9	4
4	2	2	8	5	3	5	2	5
	5	5				7	9	2
7	1	1	5	2	1	4	4	5
	5	5				8	9	4
1	3	6	1	3	5	2	8	4
	9	4	5	7	5			
2	3	2	2	3	4	1	9	3
	7	8	7			3		5
1	2	3	1	2	3	1	3	7
	4	5	4	5	6	4	6	7

5	3	4	6	7	8	9	1	2
		2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	9	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

dejanj. Glava vsakokrat pregleda celico na traku in naslednji popravek je odvisen prav od vsebine te celice in stanja stroja. Glede na ta dva podatka stroj izbriše obstoječi znak in pusti presledek ali pa zapiše nov znak (ki je lahko enak izbrisanemu). Nato stroj premakne trak v eno ali drugo smer. Obnašanje stroja je tako določeno z množico navodil, ki za vsako stanje in vsak prebrani simbol predpisujejo, katera tri dejanja se morajo izvršiti. To zaporedje navodil se imenuje tudi algoritem.

Algoritem je *polinomski* (oz. teče v polinomskem času), če je za reševanje naloge z vhodnimi podatki dolžine n potrebnih manj kot Cn^k korakov in sta C in k enaki naravni števili za vsak n . Algoritmi, ki ne tečejo v polinomskem času, so *eksponentni*. Najbrž je že jasno, da so učinkoviti le polinomski algoritmi, eksponentni pa so zaradi prevelike časovne zahtevnosti neučinkoviti. Danes se

matematiki najbolj ukvarjajo s *NP-polnimi problemi*, ki so eksponentni, dajo pa se dokazati v polinomskem času.

Najbolj slavni NP-problemi (kratica pomeni nedeterministični polinomski čas) so:

- Problem trgovskega potnika: trgovski potnik mora obhoditi večje število (npr. $n > 50$) različnih krajev, izbrati pa je treba tisti vrstni red, pri katerem bo prepotovana razdalja najkrajša.
- Problem Hamiltonovega cikla: množica krajev je povezana s cestnim omrežjem, poiskati pa je treba tak obhod, da vsak kraj obiščemo natanko enkrat in se vrnemo v izhodiščno točko.
- Barvanje zemljevida: dani zemljevid je treba pobarvati s 3 barvami tako, da sta sosedni državi obarvani z različnima barvama.
- Razvrščanje opravi na več procesorjih: imamo množico opravil in množico procesorjev in za vsako opravilo vemo, kako

dolgo bi potekalo na posameznem procesorju. Procesorji delajo vzporedno, obdelava opravi na posameznem procesorju pa zaporedno. Ali je mogoče opravila razporediti po procesorjih tako, da bo celotna obdelava zahtevala določeno vnaprej znano število ali celo manj časovnih enot?

Za vse našteje naloge, prav tako pa tudi za rešitev igre sudoku višjega reda še niso našli učinkovitih algoritmov. Kot vse kaže, najbrž sploh ne obstajajo.

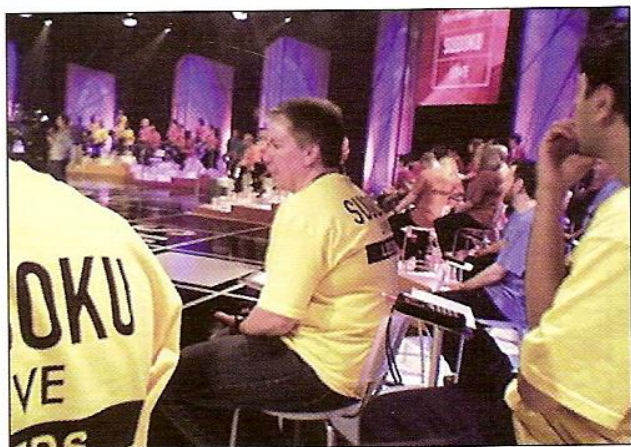
Pri iskanju splošnih zakonitosti igre ponavadi skušamo posplošiti kar igro samo. Sudoku na 81 poljih lahko gledamo kot poseben primer igre, definirane za poljubno naravno število n . Za igro sudoku reda n torej potrebujemo kvadrat z n^2 polji, ki je sestavljen iz n^2 blokov, n^2 vrstic in n^2 stolpcev. Za posebni primer reda 1 ne bomo izgubljali besed, pri redu 2 dobimo kvadrat s 4×4 polji (oz. 4 bloke 2×2), sudoku reda 3 prepoznamo kot že opisano igro na 81 poljih (9 blokov 3×3), sudoku reda 4 ima že 256 polj, reda 5 pa kar 625 polj.

Po pravi eksploziji igre, ki jo objavljajo v revijah in posebnih izdajah po vsem svetu, se je pojavilo vprašanje, koliko različnih sudokujev določenega reda je sploh mogoče sestaviti. Najlažje je razmišljati o primerih, ko v polja ni vpisana nobena številka (ko je torej sudoku brez podatkov) in ko opustimo pogoj, da morajo biti številke urejene tudi v blokih. Ali preprosteje, koliko je latinskih kvadratov določenega reda?

Če se dogovorimo, da so števila v prvem stolpcu in prvi vrstici latinskega kvadrata urejena po velikosti, je latinski kvadrat *normaliziran*. Jasno je, da je normaliziranih latinskih kvadratov posameznega reda bistveno manj kot vseh latinskih kvadratov.

Vsak sudoku je latinski kvadrat, vsak latinski kvadrat pa ni sudoku (ni nujno, da so številke urejene tudi v blokih). Iz tega sklepamo, da je sudokujev manj kot latinskih kvadratov ustrezne velikosti. Frazer Jarvis z univerze v Sheffieldu je dokazal, da je sudokujev reda 2 ravno polovica latinskih kvadratov velikosti 4×4 . Pri večanju števila n se nam zvrsti v glavi, saj je latinskih kvadratov 9×9 kar 5 524 751 496 156 892 842 531 225 600 oz. reda velikosti $6 \cdot 10^{27}$ (število so izračunali šele leta 1975). Že omenjeni Frazer Jarvis in Bertrand Felgenhauer s Tehniške univerze v Dresdnu sta izračunala še, da je sudokujev reda 3 sicer milijonkrat manj, a še vedno za normalne razmere nepredstavljivo število 6 670 903 752 021 072 936 960 oz. približno $7 \cdot 10^{21}$. To je sicer teoretično število vseh iger, vendar so med njimi tudi primeri, ki jih dobimo z vrtenjem za večkratnike 90° , s simetrijami in preurejanji. Ko se omejimo na povsem različne možnosti, dobimo bistveno manjše, a še vedno velikansko število 3 546 146 300 288 oz. $4 \cdot 10^{12}$. Po vseh teh astronomskih velikostih števil je najbrž vsakomur jasno, da bodo posekali še precej dreves in gozdov, preden se bodo sudokuji v revijah in posebnih knjižnih izdajah začeli ponavljati. Če bi namreč za oblikovanje ene

Red	Število latinskih kvadratov	Število normaliziranih latinskih kvadratov
1	1	1
2	2	1
3	12	1
4	576	4
5	161280	56
6	812851200	9408
7	61479419904000	16942080
8	108776032459082956800	535281401856
9	5524751496156892842531225600	377597570964258816
10	9982437658213039871725064756920320000	7580721483160132811489280

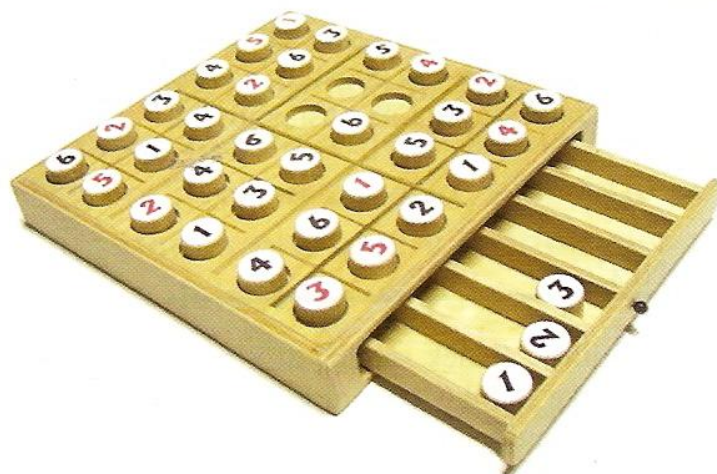
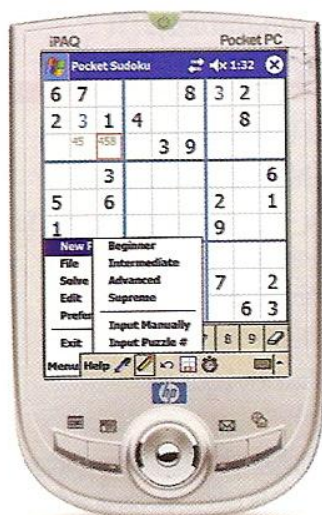
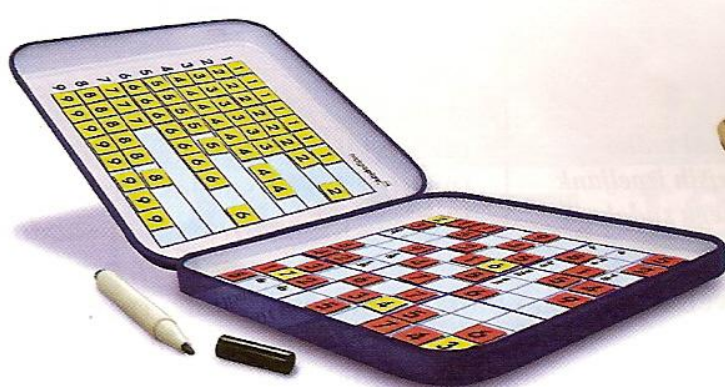


Prvo televizijsko oddajo v živo v reševanju ugank sudoku so organizirali na televizijskem kanalu Sky One julija 2005.

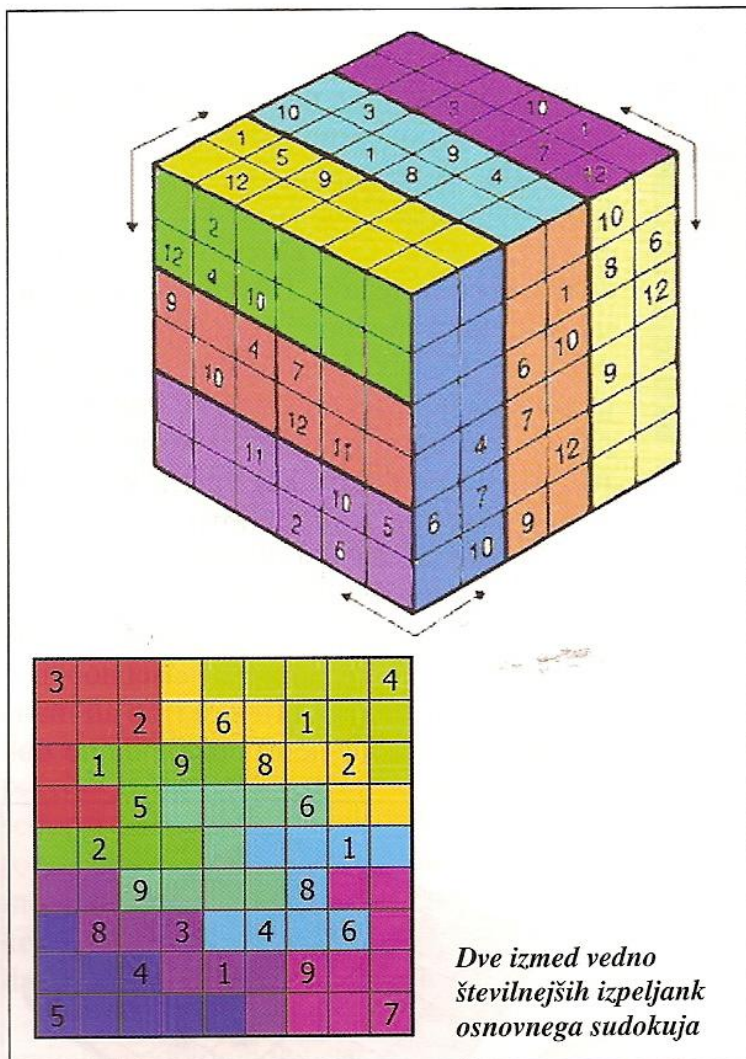
igre porabili le 5 minut, bi za vse različne možnosti potrebovali kar 40 milijonov let!

Po tej zadnji primerjavi se spet spomnimo izračunljivosti in NP-problemov. Kot

smo videli, je njihova težavnost prav v tem, da so za nizke rede velikosti lahko rešljivi, z rastočo vrednostjo n pa čas, potreben za reševanje, eksponentno raste. Primer je kar naša igra: za reševanje sudokuja na 81 poljih obstaja precej računalniških programov. Kaj pa za red 4, 5, 6 ali celo več? In to še zdaleč ni edina težava. Doslej smo se ukvarjali s štetjem možnosti igre brez vnesenih podatkov. Podatki uganke morajo zadoščati pogoju, da nobenega od njih ne moremo izpeljati iz drugih; rečemo, da so *neodvisni*. Ali število podatkov kaj vpliva na trdoto oreha? Kako je z enoličnostjo rešitve pri različnih podatkih? Gordon Royle z Univerze Zahodna Avstralija je doslej zbral že več kot 36 tisoč primerov enolično rešljivih sudokujev s 17 podatki, ni pa še našel nobenega enolično rešljivega primera s 16 ali manj podatki (kar seveda še ni dokaz, da ne ob-



Ljubitelji sudokuja, ki jim ne zadoščajo objave teh ugank v časopisih in na internetu, si lahko v spletnih trgovinah omislijo pripomoček z magnetno podlago (levo zgoraj), v leseni izvedbi (desno zgoraj) ali pa zmogljivo žepno elektronsko napravo, podobno dlančniku (levo spodaj). Spretnější bralci lahko preprost pripomoček za minisudoku, ki je zaradi manjšega števila polj namenjen predvsem mlajšim, naredijo kar sami (desno spodaj). Načrt za izdelek na sliki je bil objavljen v letošnji marčni številki slovenske modelarske revije TIM.



7	2	9	5	4	3	6	1	8
8	6	5	7	1	2	4	3	9
3	1	4	8	9	6	7	2	5
1	4	3	2	7	8	5	9	6
2	7	6	3	5	9	8	4	1
5	9	8	1	6	4	3	7	2
9	3	2	4	8	5	1	6	7
6	5	7	9	3	1	2	8	4
4	8	1	6	2	7	9	5	3

Rešitev problema s strani 50

voljo tudi cela vrsta najrazličnejših pripomočkov – od magnetnih in lesenih tabel do izredno zmogljivih žepnih elektronskih naprav.

Podobno kot se je Rubikova kocka s časom prelevila v kačo in druge oblike, ki so zahtevale še več spretnosti pri reševanju, se je tudi sudoku že začel pojavljati v obliki razpredelnic z drugačnimi bloki (npr. 6×6 , kjer so bloki pravokotniki 3×2), imenovani tudi *subdoku* (sub ali pod številom 9), pri drugih

stajajo). Za dokaz bo najbrž treba še veliko naporov.

Sudokuji v povprečju vsebujejo od 25 do 30 podatkov in od tega števila je največkrat odvisna tudi zahtevnost posameznega problema. Ta gre od lahkkih z več podatki do vražjih z manj podatki, seveda pa obstajajo tudi izjeme.

ZA KONEC

Bralci, ki jih je članek spodbudil k zanimanju za uganke sudoku, pa tudi vsi tisti, ki te logične probleme že poznajo, imajo na voljo precej priložnosti za miselno telovadbo. Za začetek lahko poskusite rešiti problem s strani 56, katerega rešitev je objavljena na tej strani. Poleg že omenjene knjige, revij in časopisov obstaja nešteto možnosti za brezplačno igranje na internetu (nekateri naslovi so podani v okvirčku na desni). Tam je na

imajo bloki obliko polinoma (pentomino, heksomino, heptomino, ...), za najzahtevnejše igralce pa obstaja tudi 3D sudoku s števili od 1 do 12 (*superdoku*).

<http://...>

www.sudoku.si/ (sudoku v slovenščini)

sl.wikipedia.org/wiki/Sudoku (sudoku v slovenščini)

en.wikipedia.org/wiki/List_of_newspapers_featuring_Sudoku (seznam revij, ki objavljajo uganke sudoku)

www.sudokudragon.com/sudoku.htm (razlaga igre)

www.dailysudoku.co.uk/sudoku/kids/ (različica 6×6)

theory.tifr.res.in/~cs Gupta/sudoku/algo.html (resne metode reševanja)

angusj.com/sudoku/index.php (opis brezplačnega računalniškega programa za sestavljanje in reševanje ugank sudoku)

sudoku-original.freeonlinegames.com/ (on line igra)

www.free-sudoku.com/cgi/sudoku.cgi (on line igra; več različic)

www.sudoku-puzzles.net/play.html (on line igra; več stopenj zahtevnosti)

www.sudokufun.com/ (on line turnir)

www.hladnik.com/sudoku.zip (brezplačni slovenski program)