



O možu, ki je rad računal

Naravna števila $A_c = \{1, 2, 3 \dots\}$ so neizčrpen vir fantazije.

Čeprav obstaja več deset tisoč zaporedij teh števil (soda in liha števila, praštevila, mnogokratniki danega števila, pa Pellova, Fibonaccijeva, Fermatova, Catalanova in druga števila), še vedno odkrivajo nova s čudovitimi – kdo drug bi rekel čudnimi – lastnostmi.

Na svetu so ljudje, ki – čeprav niso knjigovodje – ure in ure presedijo za mizo in premetavajo številke, pa jim pri tem ni nič dolgčas. Eden izmed takih posebnežev je bil indijski profesor matematike Dataraja Ramčandra Kaprekar, ki ga je teorija števil omrežila že kot otroka. Tako je nadaljeval bogato indijsko tradicijo na tem področju, saj temu narodu dolgujemo naš način zapisa števil. Kaprekar se je rodil pred dobrimi sto leti v zelo revni družini južno od Mumbaja. Po mamini smrti ga je vzgajal oče, ki je bil navdušen astrolog. Za svoje delo ni potreboval prav visoke matematike, ampak le veliko preračunavanje. Morda je prav to vplivalo na fanta,

Gregor Pavlič



D. R. Kaprekar (1905–1986)

da se je tudi sam začel ukvarjati s teorijo števil in je rad reševal računske uganke. Po uspešno končanem šolanju na prestižnem Fergusson Collegeu je na univerzi v Mumbaju študiral matematiko in leta 1927 dobil posebno nagrado *Paranjpe Mathematical Prize* za najbolj izvirno rešitev tekovalne naloge. Po diplomi dve leti pozneje je bil nastavljen kot učitelj matematike na srednji šoli v bližnjem mestu Devlali. To delo je opravljal do upokojitve leta 1962.

Prav nič vznemirljiva zgodba, bi rekli. Vendar se je Kaprekar ob služenju vsakdanjega kruha še naprej 'igral' s števili in ob tem brez formalnega nadaljnega izobraževanja prišel do nekaterih prav osupljivih odkritij. Leta 1949 je na matematični konferenci v Madrasu pokazal, da je število 6174 nekaj posebnega (danes se po njem imenuje *Kaprekarjeva*

konstanta). Če namreč poljubno 4-mestno naravno število, ki nima enakih števk, zapišemo najprej s števki v padajočem vrstnem redu in še s števki v naraščajočem vrstnem redu, nato pa ti števili odštejemo, dobimo novo 4-mestno število. Lahko se zgodi, da je to število 6174; če ni, postopek ponovimo. Izkaže se, da se stvar konča v največ 7 korakih: →

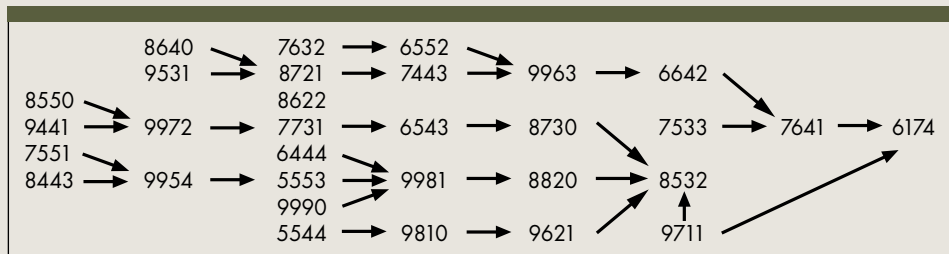
Preglednica A

	$999 \cdot (a - d)$									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$90 \cdot (b - c)$	0	999	1988	2997	3996	4995	5994	6993	7992	8991
	1	1089	2088	3087	4086	5083	6084	7083	8082	9081
	2	1179	2178	3177	4176	5175	6174	7173	8172	9171
	3	1269	2268	3267	4266	5265	6264	7263	8262	9261
	4	1359	2358	3357	4356	5355	6354	7353	8352	9351
	5	1449	2448	3447	4446	5445	6444	7443	8442	9441
	6	1539	2538	3537	4536	5535	6534	7533	8532	9531
	7	1629	2628	3627	4626	5625	6624	7623	8622	9621
	8	1719	2718	3717	4716	5715	6714	7713	8712	9711
	9	1809	2808	3807	4806	5805	6804	7803	8802	

Preglednica B

	$999 \cdot (a - d)$									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
$90 \cdot (b - c)$	0	9990	9981	9972	9963	9954	9954	9963	9972	9981
	1	9810	8820	8730	8640	8530	8640	8730	8820	9081
	2		8721	7731	7641	7551	7641	7731	8721	9711
	3			7632	6642	6552	6642	7632	8622	9621
	4				6543	5553	6543	7533	8532	9531
	5					5544	6444	7443	8442	9441
	6						6543	7533	8532	9531
	7							7632	8622	9621
	8								8721	9711
	9									9810

Preglednica C



Število korakov	0	1	2	3	4	5	6	7
Frekvenca	1	356	519	2124	1124	1379	1508	1980

Če bi hoteli veljavnost pravila, da Kaprekerjevo konstanto 6174 dobimo v največ 7 korakih, dejansko preizkusiti, bi morali preveriti 8991 števil (vsa 4-mestna števila, katerih številke niso enake). Vendar to ni potrebno, saj je ameriški matematik Malcolm Lines število preverjanj zelo domiselno omejil na 30. Oglejmo si njegov pristop.

Število $\overline{abcd}$, ki ga preverjamo, moramo zapisati po padajočih in nato naraščajočih števkih ter nato števili odšteti. Za številke torej velja $9 \geq a \geq b \geq c \geq d \geq 0$ (pri čemer ne velja, jo vse enakosti hkrati):

$$1000a + 100b + 10c + d - (1000d + 100c + 10b + a) = \\ 1000(a - d) + 100(b - c) + 10(c - b) + (d - a) = \\ 999(a - d) + 90(b - c)$$

Razlika $(a - d)$ lahko zavzame naravne vrednosti od 1 do 9, razlika $(b - c)$ pa vrednosti od 0 do 9.

Po prvem odštevanju smo 8991 števil skrhili na 90 števil (glej preglednico A na levi).

Zaradi omejitve $a \geq b \geq c \geq d$ morajo številke a, b, c in d ustrezati pogoju $(a - d) \geq (b - c)$, ki je logično ekvivalenten pogoju $(a - d) < (b - c)$. Zato lahko v preglednici A prečrtamo vsa števila pod diagonalo. Po preureditvi števk števil po padajočem vrstnem redu dobimo spodnjo preglednico 45 števil, od katerih spet lahko prečrtamo dvojnike (na sivih poljih), tako da na koncu dobimo 30 števil (glej preglednico B na levi).

Od tu naprej ni več daleč do rezultata. Z drevesno strukturo se hitro prepričamo, da je do števila 6174 potrebnih še največ 6 odštevanj (glej preglednico C na levi).

Matematiki, ki so podobno konstanto iskali tudi za števila z drugačnim številom mest, so prišli do zaključka, da je za dvomestna števila ni, za trimestna števila je to število 495 (o čemer se bralci lahko prepričajo sami), za pet- in večmestna števila pa so s pomočjo računalnika izračunali, da take konstante ni ali pa je več kot ena.

Število mest	Konstanta
2	je ni
3	495
4	6174
5	je ni
6	549945, 631764
7	je ni
8	63317664, 97508421
9	554999445, 864197532
10	6333176664, 9753086421, 9975084201

Naslednji dosežek skromnega indijskega matematika so t. i. Kaprekarjeva števila – naravna števila n , katerih kvadrat lahko razdelimo na dva dela in je vsota dobljenih števil prvotno število n . Za primer vzemimo število 45.

$$45^2 = 2025, 20 + 25 = 45.$$

Poglejmo prvih 40 števil te vrste: 1, 9, 45, 55, 99, 297, 703, 999, 2223, 2728, 4879, 4950, 5050, 5292, 7272, 7777, 9999, 17344, 22222, 38962, 77778, 82656, 95121, 99999, 142857, 148149, 181819, 187110, 208495, 318682, 329967, 351352, 356643, 390313, 461539, 466830, 499500, 500500, 533170, 538461.

Splošna oblika zapisa n -Kapekerjevega števila K (n pomeni število njegovih mest) je

$$K = \overline{ab}; K^2 = \overline{a} \cdot 10^n + \overline{b}.$$

Kot primer vzemimo najprej enomestno Kaprekarjevo število

$$K = 9; 9 = 8 + 1; 9^2 = 81 = 10 \cdot 8 + 1$$

in nato še štirimestno

$$K = 2223; 2223^2 = 4941729 = 494 \cdot 10^4 + 1729; 494 + 1729 = 2223.$$

Kaprekarjeva števila, manjša od 10000, so:

$9^2 = 81$	$8 + 1 = 9$
$45^2 = 2025$	$20 + 25 = 45$
$55^2 = 3025$	$30 + 25 = 55$
$99^2 = 9801$	$98 + 01 = 99$
$703^2 = 494209$	$494 + 209 = 703$
$999^2 = 998001$	$998 + 001 = 999$
$2223^2 = 4941729$	$494 + 1729 = 2223$
$2728^2 = 7441984$	$744 + 1984 = 2728$
$4879^2 = 23804641$	$2380 + 4641 = 4879$
$4950^2 = 24502500$	$2450 + 2500 = 4950$
$5050^2 = 25502500$	$2550 + 2500 = 5050$
$5292^2 = 28005264$	$28 + 005264 = 5292$
$7272^2 = 52881984$	$5288 + 1984 = 7272$
$7777^2 = 60481729$	$6048 + 1729 = 7777$
$9999^2 = 99980001$	$9998 + 0001 = 9999$

Leta 2000 so ugotovili, da so med Kaprekarjevimi števili tudi vsa števila, sestavljena iz samih devetic: 9, 99, 999 ... (t. i. *9-dolgočasna števila*). Dokaz za to je tako preprost, da ga lahko navedemo.

Vsako *9-dolgočasno število* se da zapisati v obliki

$$10^n - 1; n = 1, 2, 3 \dots$$

Ko to število kvadriramo in kvadrat nekoliko preuredimo, dobimo:

$$(10^n - 1)^2 = 10^n \cdot 10^n - 2 \cdot 10^n + 1 = (10^n - 2) \cdot 10^n + 1.$$

Ker je $(10^n - 2) + 1 = 10^n - 1$, je trditev že dokazana. S tem pa smo dokazali tudi, da je Kaprekarjevih števil neskončno mnogo.

A s tem Kaprekarjevih računskih vragolij še ni konec. Domislil se je tudi druge vrste števil – med drugim *števila devlali* in *haršadska števila*. Prva, ki so dobila ime po mestu, kjer je bil v službi, nekateri imenujejo tudi *sama števila* (angl. self numbers). Pot do njih je precej zapletena, zato najprej opišimo operacijo, ki jo je Kaprekar imenoval *digiadicija*. Za primer vzemimo število 25. Digiadicija pomeni, da številu 25 prištejemo vsoto njegovih števk (dobimo število 32), temu spet prištejemo število njegovih števk (dobimo 40) itd. Očitno s takim početjem dobimo neskončno naraščajoče zaporedje števil. Zdaj pa

se od začetnega števila 25 napotimo nazaj in poskušajmo ugotoviti, ali je to število lahko nastalo z digiadicijo manjšega števila. Z malo kombinatoričnega truda pridemo do števila 17, saj je $17 + (1 + 7) = 25$. Če proces nadaljujemo z iskanjem predhodnega števila s to lastnostjo, pridemo do števila 13, kajti $13 + (1 + 3) = 17$. V nadaljevanju dobimo še število 11, saj je $11 + (1 + 1) = 13$, in število 5, ker je $11 = 5 + (5 + 1)$. Naprej oz. nazaj pa ne gre več, ker 5 ne moremo generirati po tej metodi. Število 5 je torej *število devlali*.

Števila devlali, manjša od 500, so: 1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97, 108, 110, 121, 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198, 209, 211, 222, 233, 244, 255, 266, 277, 288, 299, 310, 312, 323, 334, 345, 356, 367, 378, 389, 400, 411, 413, 424, 435, 446, 457, 468, 479 in 490.

Za vajo lahko poskusimo ugotoviti, ali 2010 spada med *števila devlali*, in če ne, katero *število devlali* je začetek zaporedja, v katerem to število nastopa:

$$\begin{aligned} 2010 &= 2004 + 6 \rightarrow 2004 = 1983 + 21 \rightarrow \\ 1983 &= 1959 + 24 \rightarrow 1959 = 1938 + 21 \rightarrow 1938 \\ &= 1923 + 15 \rightarrow 1823 = 1911 + 12 \rightarrow 1911 = \\ 1887 &+ 24 \rightarrow 1887 = 1866 + 21 \\ &\rightarrow 1866 = 1851 + 15. \end{aligned}$$

S številom 1851 se ta igra konča, saj ne moremo več 'nazaj'. Najbližji števili, ki bi prišli v poštev, sta 1834 in 1835, kajti $1834 + 16 = 1850$ in $1835 + 17 = 1852$. Iz tega torej lahko zaključimo, da 2010 ni *število devlali* in da spada v zaporedje s korenem 1851.

Haršadska števila so naravna števila, deljiva z vsoto svojih števk. (V jeziku sanskrt beseda *haršad* pomeni vzrok veselja; očitno so ta števila Kaprekarju prinesla veliko veselja.) Ker so vsa enomestna števila *haršadska*, preverimo veljavnost za nekaj prvih dvomestnih števil (10, 12 in 18) ter za število 2010:

$$\begin{aligned} 10 : (1 + 0) &= 10; 12 : (1 + 2) = 4; 18 : (1 + 8) = 2; \\ 2010 : (2 + 1) &= 670. \end{aligned}$$

Haršadska števila do vključno števila 200 so: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90, 100, 102, 108, 110, 111, 112, 114, 117, 120, 126, 132, 133, 135, 140, 144, 150, 152, 153, 156, 162, 171, 180, 190, 192, 195, 198 in 200.

Faktoriela naravnega števila n je $n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Npr. $1! = 1$ je deljivo z 1; $2! = 2 \cdot 1 = 2$ je deljivo z 2; $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ je deljivo s 3; $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ je deljivo z $(2 + 4) = 6$; $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ je deljivo z $(1 + 2 + 0) = 3$ itd.

Računarski navdušenci so ugotovili, da sta 80 in 81 edini par zaporednih *haršadskih števil* ter da so 110, 111 in 112 edina trojica zaporednih *haršadskih števil*. Leta 1994 so dokazali, da ne obstaja 21 zaporednih naravnih števil, ki bi vsa spadala med *haršadska*. Za zaporednih 20 naravnih števil, ki so vsa deljiva z vsoto svojih števk, pa moramo zelo zelo daleč: ta števila so namreč večja od $10^{44363342786}$.

Med raziskovanjem *haršadskih števil* so ugotovili tudi to, da so med njimi zaporedne faktoriele naravnih števil: $1!, 2!, 3!, 4!, 5! \dots$ Postavili so domnevo, da to velja za vsako naravno število, vendar so kmalu našli protiprimer v številu 432!.

Čeprav je Kaprekar pošteno delal vse življenje ter postavil vrsto trditev, ki jih današnji matematiki razvijajo naprej in postavljajo

cele teorije, je moral po upokojitvi inštruirati matematiko, da se je ob skromni pokojnini lahko preživiljal. Svoje delo in ljubezen do matematike je opisal takole: »Pijanček si želi pijače, da bi prišel v blaženo stanje. Prav tako je z mano, če pijačo nadomestimo s števili.«

Zadnje raziskave kažejo, da so Kaprekarjeva odkritja zelo uporabna v analitični teoriji števil in v teoriji praštevil, brez katere si sodobne kriptografije ne bi bilo mogoče predstavljati.

[https://](https://en.wikipedia.org/wiki/D._R._Kaprekar)

en.wikipedia.org/wiki/D._R._Kaprekar

www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Kaprekar.html

mathworld.wolfram.com/KaprekarNumber.html

mathworld.wolfram.com/SelfNumber.html

www.statemaster.com/encyclopedia/Haršad-number

en.wikipedia.org/wiki/Haršad_number

mathworld.wolfram.com/DemloNumber.html

OGLAS