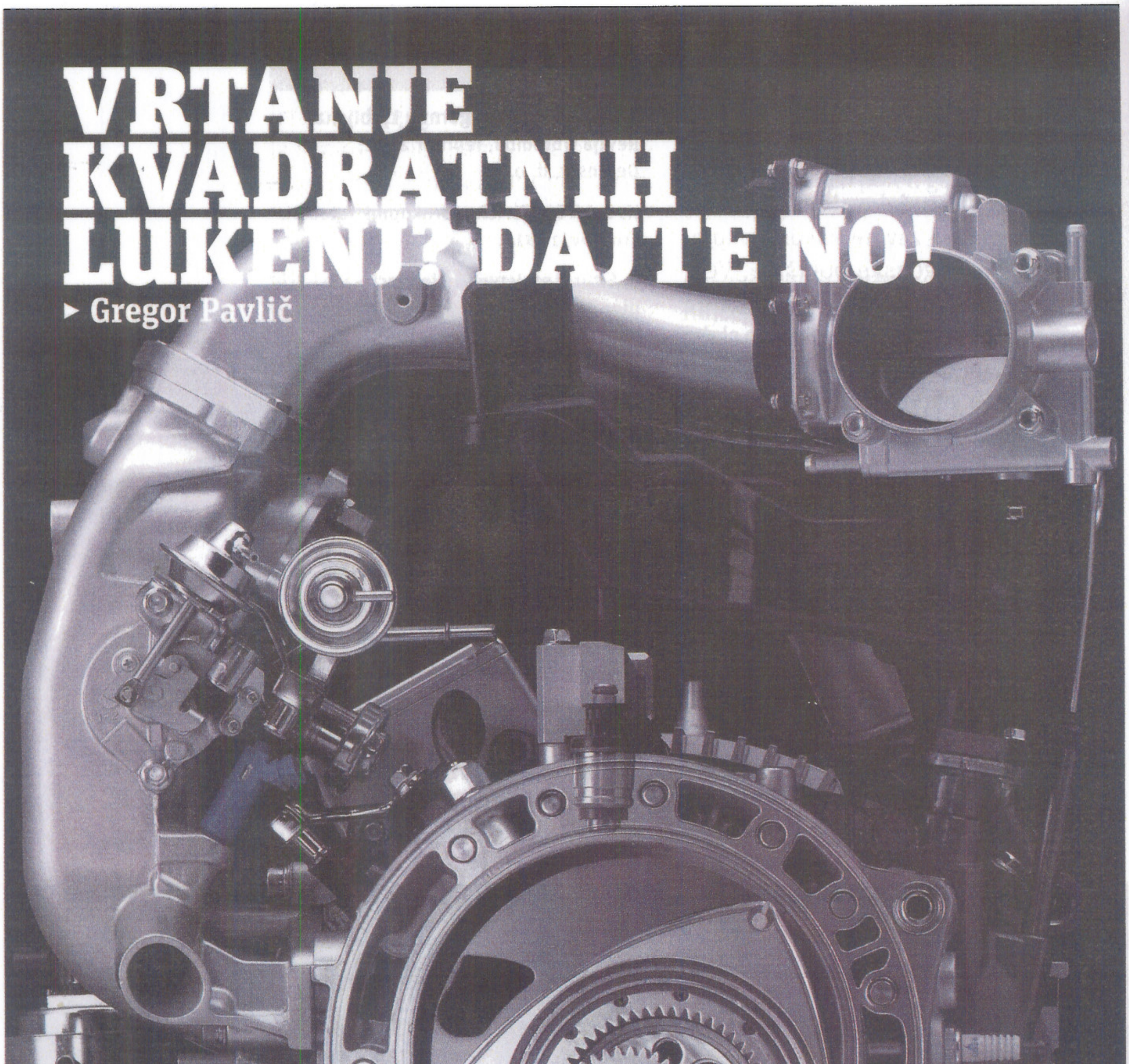
VRTANJE KVADRATNIH LUKENJ? DAJTE NO!

▸ Gregor Pavlič

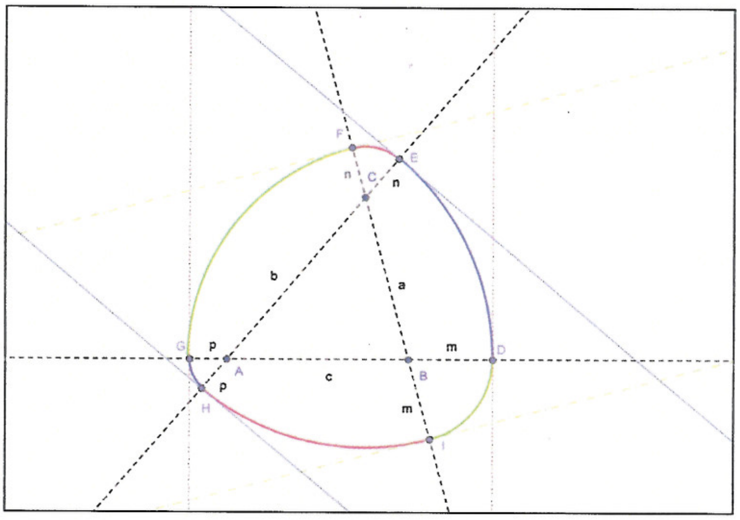


Čeprav naslov obeta neverjetno zgodbo, moramo začeti čisto na drugem koncu – pri matematičnih osnovah čudežnega svedra oz. pri krivuljah s konstantnim premerom. Preprosta geometrijska oblika 'rahlo napihnjenega' trikotnika se je v 12. stol. pojavila kot okno v svet v cistercijanskem samostanu v Švici in v katedralah na Flamskem, opazil jo je Leonardo da Vinci, v času industrijskega razcveta pa je postala pomemben strojni element.

Rotor Wanklovega motorja ima v prerezu obliko Reuleauxovega trikotnika.

KRIVULJE S KONSTANTNIM PREMEROM SO ROBOVI KONVEKSNIH MNOŽIC V ravnini, ki ležijo med poljubnima dvema vzporednima tangentama, pravokotna razdalja med dotikališčema pa je konstantna.

Konstrukcija take množice ni zahtevno opravilo. Poglejmo preprost primer. V ravnini izberemo tri nekolinearne točke A, B in C ter skoznje potegnemo tri premice. En krak šestila zabodemo v točko A in nasproti narišemo lok s polmerom $b + n$ med premicama. Potem zabodemo en krak v točko B in iz presečišča narišemo naslednji lok med premicama, ki ima polmer m. Krivuljo nadaljujemo z lokom, ki ima središče v točki C in polmer $a + m$, nato pride na vrsto lok s polmerom p iz točke A, lok s polmerom $c + p$ spet iz točke B in končno lok s polmerom n iz točke C. Tako smo dobili sklenjeno krivuljo.



Pri načrtovanju krivulje opazimo naslednje zveze med uporabljenimi polmeri:

$b + n = c + m;$

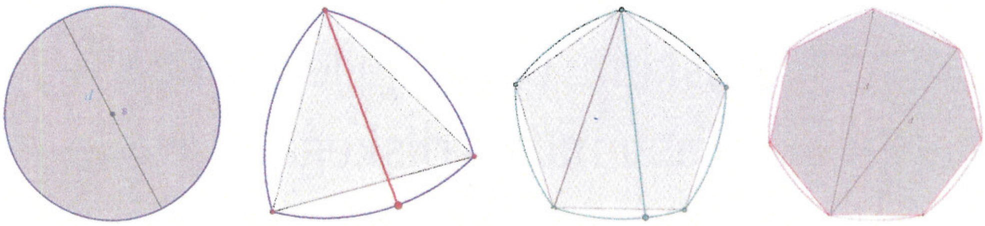
$b + p = a + m;$

$c + p = a + n.$

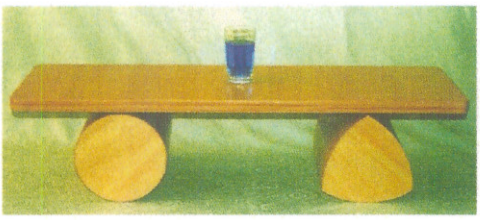
Hitro se lahko prepričamo, da so pravokotne razdalje med tangentami oz. premeri krivulje enake:

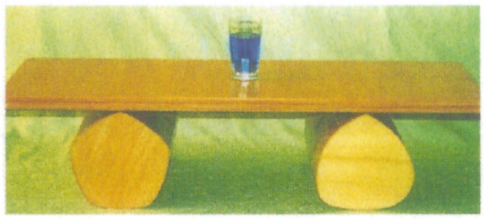
1) Iz prvih dveh enakosti izrazimo m, izraza izenačimo in dobimo:
$m = b + n - c; m = b + p - a;$
$n - c = p - a; a + n = c + p.$
Če na obeh straneh enačbe prištejemo m, dobimo:
$a + n + m = p + c + m$ (1).
2) Iz prve in tretje enakosti izrazimo n, izraza izenačimo in dobimo:
$n = c + m - b; n = c + p - a;$
$a - p = b - m; a + m = b + p.$
Če na obeh straneh enačbe prištejemo n, dobimo:
$a + m + n = b + p + n$ (2).
3) Po tranzitivnosti iz formul (1) in (2) sledi, da so 'premeri' krivulje res enaki
$a + n + m = p + c + m = b + p + n.$

Najbolj preprosta krivulja s konstantnim premerom je krožnica, obstajajo pa tudi druge, med katerimi so najbolj znane Reuleauxov trikotnik, Reuleauxov peterokotnik in Reuleauxov sedmerokotnik.



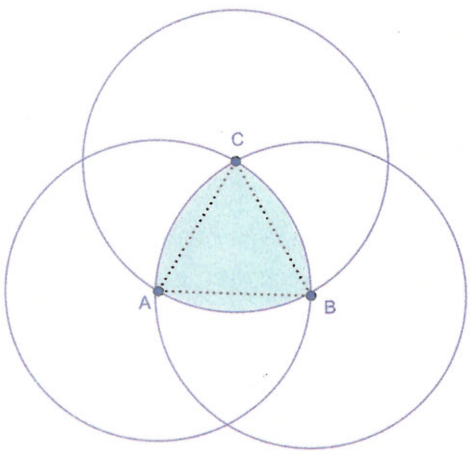
➲ Najbolj preprosta krivulja s konstantnim premerom je krožnica, obstajajo pa tudi druge, med katerimi so najbolj znane Reuleauxov trikotnik, Reuleauxov peterokotnik in Reuleauxov sedmerokotnik.





➲ Pri previdnem premikanju plošče prek posebnih 'valjev' tekočina v kozarcu ostane v vodoravnem položaju.

Za konstrukcijo Reuleauxovega trikotnika potrebujemo enakostranični trikotnik, katerega vsako od oglišč je središče krožnice s polmerom, ki je enak stranici d enakostraničnega trikotnika. Krivuljo torej sestavljajo trije krožni loki s polmerom d.



Od vseh likov, ki imajo za rob krivuljo s stalnim premerom d, ima največjo ploščino krog; imajo pa te krivulje pri enakem premeru enak obseg $o = \pi d$. To lastnost je prvi dokazal francoski matematik Joseph Emile Barbier (1839–1889) in se po njem imenuje Barbierov izrek.

Če si podrobneje ogledamo obsega Reuleauxovega trikotnika in Reuleauxovega peterokotnika, ugotovimo, da je obseg prvega vsota dolžin treh enakih lokov, pri čemer je vsak od njih šestina krožnice s polmerom d. Obseg je torej enak $o = 3 \cdot 2\pi d/6 = \pi d$. Pri obsegu Reuleauxovega peterokotnika seštejemo 5 enako dolgih lokov s polmerom d, ki pripadajo obodnemu kotu 36° (središčni kot

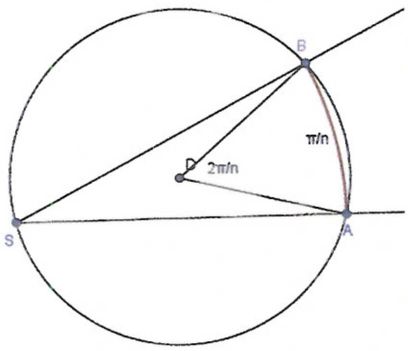
Reuleaux in njegov trikotnik

Franz Reuleaux (1829–1905) je bil rojen v blizu Aachna v nekdanji Prusiji. Njegov ded in oče sta delovala v strojegradnji, kar je pomembno vplivalo na njegovo življenjsko pot. Najprej se je šolal na Politehniki v Karlsruheju, pozneje pa še v Berlinu in Bonnu. Po nekajletnem delu v domačem podjetju je začel predavati na švicarskem zveznem inštitutu v Zürichu. Od leta 1879 naprej je bil predavatelj na Kraljevi tehnični akademiji v Berlinu in pozneje tudi njen predsednik. Sčasoma je postal vodilni nemški znanstvenik na področju strojništva. Na željo takratne nemške vlade je bil vodja projekta izdelave 300 mehanizmov za znanstveno in pedagoško rabo.

Reuleauxov trikotnik,.po katerem je danes najbolj znan, je med drugim postal osnova za rotor Wanklovega motorja in obliko svedra, s katerim lahko izvrtamo luknje skoraj kvadratne oblike.

nad istim lokom je 72°). Ker je ta lok desetina krožnice s polmerom d, je obseg Reuleauxovega peterokotnika $o = 5 \cdot 2\pi d/10 = \pi d$.

Do splošne formule za obseg pravilnega Reuleauxovega n-kotnika zdaj ni več daleč. Sešteti moramo n enakih lokov, ki so n-ti deli krožnice s polmerom d. Dolžina enega takega loka je $\pi/n \cdot d$, ker pripada obodnemu kotu, katerega središčni kot meri $2\pi/n$. Obseg Reuleauxovega pravilnega n-kotnika je zato spet $o = n \cdot \pi d/n = \pi d$.



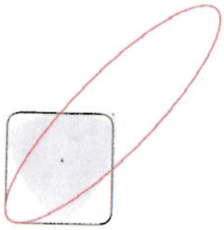
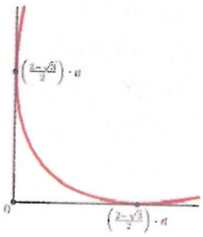
Čeprav je Franz Reuleaux živel konec 19. stol., je bil 'njegov' trikotnik znan že stavbenikom, ki so gradili cerkve in samostane v dobi romanike, predstavljen pa je tudi v rokopisu slavnega Leonarda da Vincija. V poznejših obdobjih se krivulje s stalnim premerom pojavljajo kot oblike nekaterih angleških kovancev, pred štirimi leti smo jih lahko videli kot 'kolesa' promocijskih 'biciklov' na olimpijadi v Pekingu, v precej nenavadni povezavi pa sta tudi Reuleauxov trikotnik in strojna industrija, o čemer bo govora v nadaljevanju tega prispevka.

Če zavrtimo Reuleauxov trikotnik v kvadratu, katerega nasprotni stranici sta njegovi tangenti, se oglišča trikotnika skoraj ves čas pomikajo po obodu kvadrata. Od njega se odmaknejo samo v ogliščih, ko se gibljejo po elipsi.



Denimo, da so oglišča kvadrata točke $T_1(1,1)$, $T_2(-1,1)$, $T_3(-1,-1)$, $T_4(1,-1)$ v pravokotnem koordinatnem sistemu. Središče omenjene elipse je v točki $T_1(1,1)$, njeni polosi pa merita $a = \sqrt{3} + 1$ in $b = \sqrt{3} - 1$ ter sta za 45° zasukani glede na koordinatni osi:

$$x^2 - \sqrt{3}\,xy + y^2 - (2 - \sqrt{3})x - (2 - \sqrt{3}) \cdot y + 1 - \sqrt{3} = 0.$$

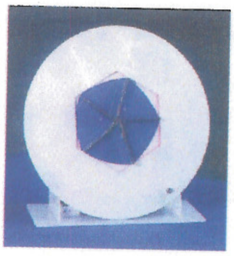
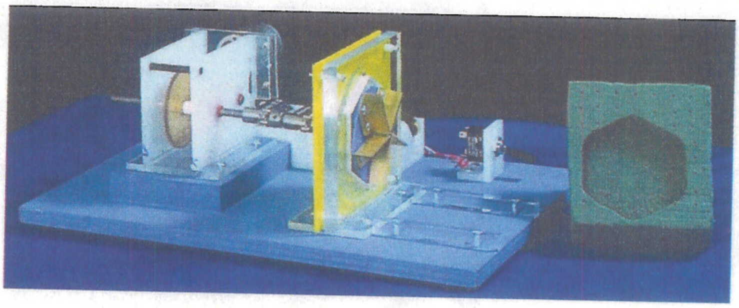



Središče Reuleauxovega trikotnika se pri vrtenju znotraj kvadrata giblje po krivulji, ki je zelo podobna krožnici, a je sestavljena iz štirih eliptičnih odsekov.


Središče te elipse je spet v točki $T_1(1,1)$, njeno levo teme leži na krivulji (centroidu), po katerem se giblje središče Reuleauxovega trikotnika; polosi merita $a = 1 + 1/\sqrt{3}$ in $b = 1 - 1/\sqrt{3}$ ter sta za 45° zasukani glede na koordinatni osi:

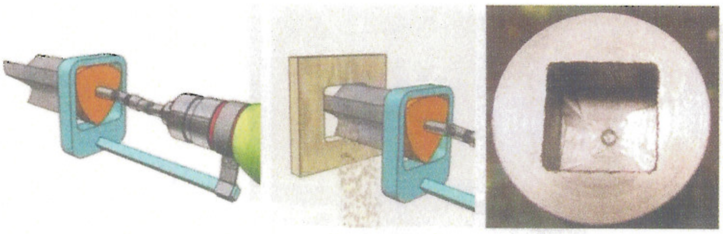
$$3x^2 - 3\sqrt{3}\,xy + 3y^2 - 3(2 + \sqrt{3})x - 3(2 + \sqrt{3})y + 5 - 3\sqrt{3} = 0.$$

Ploščina lika znotraj krivulje, ki jo opišejo oglišča Reuleauxovega trikotnika, ustreza kar 98,8 % ploščine kvadrata.

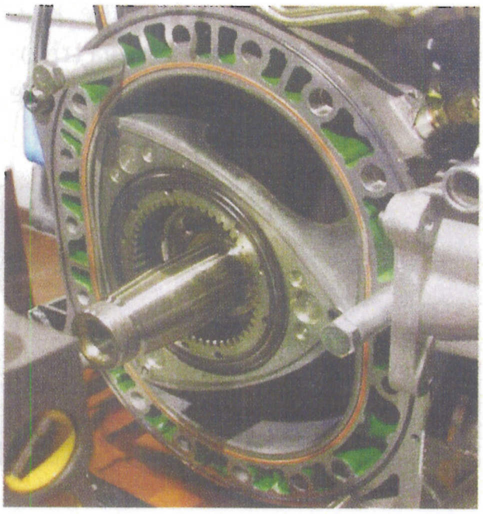



In zdaj smo končno prišli do pomena naslova pričujočega prispevka. Ko je strojni inženir Harry Watts razmišljal o nenavadni lastnosti Reuleauxovega trikotnika, se mu je porodila genialna ideja. Leta 1914 je patentiral t. i. plavajoči sveder (angl. full floating chuck) za vrtanje štirikotnih, peterokotnih, šesterokotnih in sedmerokotnih lukenj. Podjetje Watts Brothers Tool Works s sedežem v Wilmerdingu v ameriški zvezni državi Pensilvanija ima še vedno ekskluzivno pravico izdelave in prodaje teh svedrov.

Zaradi možnosti izmetavanja izvrtanega materiala sveder na prvi pogled nima nič skupnega z Reuleauxovim trikotnikom, vendar na-

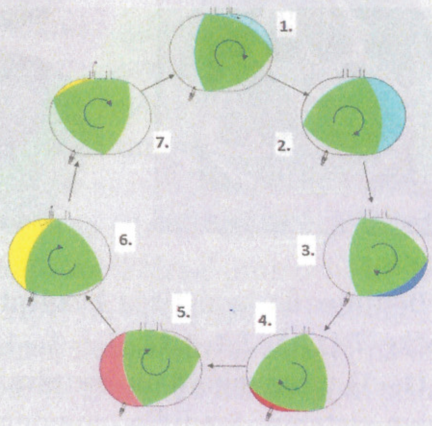


tančen pogled pokaže bistvene tri točke – njegova oglišča. Pri kroženju po kvadratu središče Reuleauxovega trikotnika opisuje krivuljo iz štirih eliptičnih lokov, zato mora biti sveder vpet tako, da pri vrtenju opisuje enako krivuljo.



Reuleauxov trikotnik je dal idejo tudi nemškemu strojnemu inženirju in izumitelju Felixu Heinrichu Wanklu (1902–1988). Čeprav ni imel formalne izobrazbe, mu je kot edinemu inženirju 20. stoletja uspelo skonstruirati motor z notranjim zgorevanjem, ki ga je tovarna NSU-Werke leta 1963 vključila v serijsko proizvodnjo (ŽIT 2001/3, str. 62). Rotor, ki ima v preseku obliko Reuleauxovega trikotnika, se v ohišju obrača ekscentrično, tako da so njegovi trije vogali vedno na steni ohišja. Med tremi stranicami rotorja in notranjo steno ohišja so tri komore, katerih prostornina se med vrtenjem rotorja stalno spreminja.

Delovanje Wanklovega rotacijskega motorja



Vsesavanje (1 in 2) – Eden od rotorjevih vogalov med drsenjem po ohišju odpre sesalni kanal. V komoro priteka zmes bencina in zraka. Njena prostornina se med vrtenjem rotorja povečuje.

Stiskanje (3) – Pri nadaljnjem vrtenju rotorja se prostornina komore, v kateri je zmes, manjša. S tem se zmes stisne.

Delovni gib (4 in 5) – Iskra s svečke vžge zmes. Zgoreli plini se širijo in poganjajo rotor v vrtenje. Prostornina komore se spet veča.

Izpuh (6 in 7) – Prva tesnilna letev komore zdrsne naprej ob izpušnem kanalu in ga s tem odpre.

Opisani delovni proces se odvija v vseh treh komorah hkrati.

SPLETNI NASLOVI

- http://upper.us.edu/faculty/smith/reuleaux.htm
- http://whistleralley.com/reuleaux/reuleaux.htm
- http://opus.kobv.de/tuberlin/volltexte/2008/2012/html/festschrift/reuleaux_e.htm
- http://en.wikipedia.org/wiki/Franz_Reuleaux
- http://kmoddl.library.cornell.edu/tutorials/02/