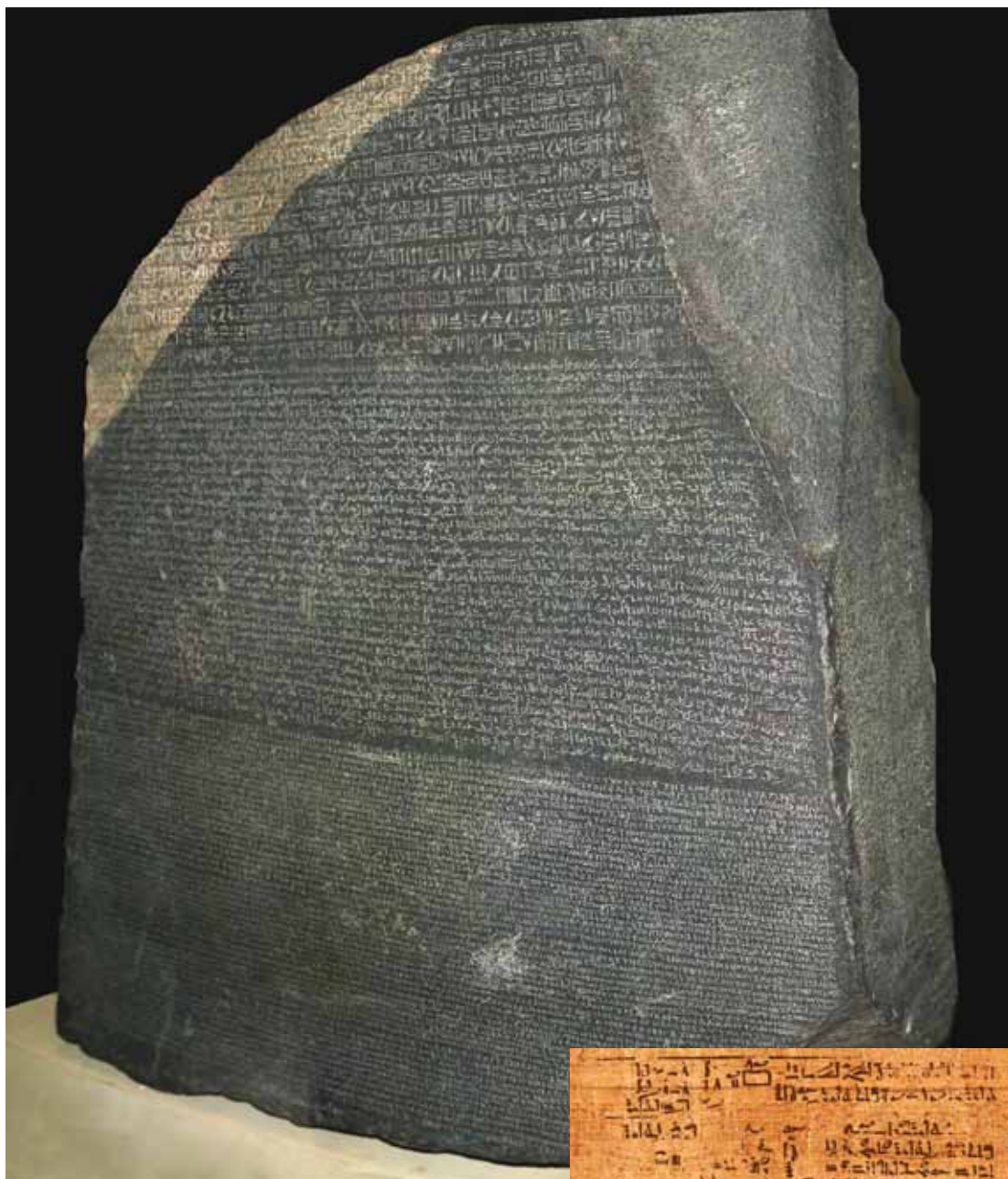




EGIPČANSKI ULOMKI

► Gregor Pavlič



Kamen iz Rosette je tista osrednja arheološka najdba, ki pomeni ključ do razumevanja zgodovine starega Egipta ter obenem tudi do vsebine še veliko starejšega Rhindovega oziroma Ahmesovega papirusa – naslednjega izredno pomembnega dokumenta, ki nam odstira pogled na znanje matematike tistega časa.

STOLETJA SO LJUDJE V VELIČASTNIH PIRAMIDAH EGIPČANOV občudovali odkrite grobnice z bogatimi stenski-mi poslikavami in mumijam prilo-žene papirusne zvitke. A kaj jim ti pripovedujejo, so lahko začeli spo-znavati šele po letu 1799, ko je bila blizu Aleksandrije po naključju od-krita granitna plošča z zapisom ena-kega besedila v treh jezikih.

► KAMEN IZ ROSETTE

Na ravni in gladki površini $114 \times 72 \times 30$ cm velike, skoraj črne kam-nite plošče je vklesano besedilo, ki so ga leta 196 pr. n. š. sestavili duhovniki na posebnem srečanju v čast 13-letnemu kralju Ptolemaju V. v devetem letu njegovega vlada-nja. Sin Ptolemaja IV. Filopatorja in njegove žene ter sestre Arsinoje je zavladal pri petih letih, potem ko so njegove starše zarotniško ubili. Po zadnjih dognanjih je imela glav-no besedo pri umoru Filopatorjeva priležnica Agatokleja, ki se je po tej

poti z zarotniki dokopala do kraljev-skega položaja. A že po dveh letih je prišlo do upora in Agatoklejo so skupaj z njeno družino kamenjali. Mladi vladar je kmalu spoznal, da bo oblast lahko obdržal samo s pomočjo zaščite velikih duhovnikov. Zato za srečanje ni izbral glavnega mesta Aleksandrije, ampak Memfis, ki je bil takrat središče duhovnega življe-nja. Veliki duhovniki so na veliko granitno ploščo dali vklesati razglas o božanstvu novega vladarja v treh jezikih: v jeziku bogov (hieroglifi), v jeziku pisarjev (demotska pisava) in v grščini, ki je bila uradni jezik od prevlade Aleksandra Makedonskega leta 332 pr. n. š.

Črni kamen so skoraj dve tisoč-letji pozneje v zakotnem mestu Rašid (Rosetta) našli Napoleonovi vojaki po zavzetju bližnje trdnjave, imenovane Fort Julien. Kot gradbeni material so ga uporabili pri gradnji mameluške trdnjave sultana Kaj-baja, tja pa je prišel najverjetneje iz kraljevega mesta Sais, katerega

tempelj je okoli leta 390 dal zapreti vzhodnorimski cesar Teodor I., ker ni bil krščanski. Nekemu francoskemu poveljniku se je najdba zdela nekaj posebnega, zato jo je ukazal prepeljati v glavni štab, kjer so jo prevzeli arheologi.

Ti so podroben opis plošče vključili v monumentalno delo *Description de l'Égypte*, ki je nastalo v letih 1809–1822 in pomeni začetek nove arheološke veje – egiptologije (ŽIT 2003/2, str. 51; ŽIT 2003/3, str. 28; ŽIT 2004/7, str. 31). Vsebuje namreč številne zemljevide, natančne risbe starodavnih ruševin, piramid, grobnic, svetišč in obeliskov, pa tudi opise in risbe rastlinskega ter živalskega sveta v Nubijski puščavi in dolini Nila. Vse skupaj se je začelo s francosko odpravo v Egipt, ki jo je Napoleon utemeljil kot prvi korak vojaške operacije, s katero naj bi prekinili angleške trgovske poti v Indijo. Po tajnih pripravah je leta 1789 iz Toulousa odplulo 55 vojaških in 280 tovornih ladij s 54.000 ljudmi (od tega je bilo 36.000 vojakov). Med njimi je bilo tudi skoraj 200 znans-tvenikov z različnih področij, ki naj bi raziskali skrivnostno daljno deželo. V enem samem mesecu je Napoleonova vojska večkrat premagala Mameluke in po dobljeni bitki pri piramidah zavzela ozemlje vse do Asuana. Napoleon je ob tej priložnosti nagovoril vojake z besedami, ki so odmevale po vsej Evropi: »Z vrhov teh piramid v vas zre štirideset stoletij.«

Toda Angleži se niso dali kar tako. Admiral Nelson je 1. avgusta 1798 s svojim ladjevjem presenetil Francoze, ki so bili zasidrani v zalivu Abukir. Skupaj z Mameluki jih je v naslednjih letih počasi pregnal

iz Egipta in po francoski vdaji leta 1801 je kamen iz Rosette prešel v angleške roke ter končal v Britanskem muzeju (ŽIT 2013/1, str. 26).

Leta 2003 je egiptovska vlada od Angležev zahtevala vrnitev svojih pomembnih spomenikov, zato je Britanski muzej dve leti pozneje Egiptu izročil repliko kamna iz Rosette v naravni velikosti. Poleg tega so Britanski muzej iz Londona, pariški Louvre, Pergamonski muzej iz Berlina in Metropolitanski muzej iz New Yorka podpisali skupno izjavo, da našteje ustanove niso namenjene samo državljanom posamezne države, ampak državljanom vsega sveta.

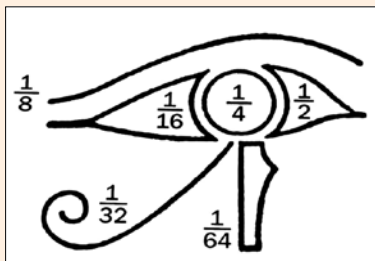
Ključno pri poznejšem raziskovanju skrivnostnih treh enakih zapisov na kamnu iz Rosette je bilo dejstvo, da je bil tisti v grščini izvirnik, pri obeh egipčanskih pa je šlo za prevoda. Zato sta lahko angleški fizik in zdravnik Thomas Young (1773–1829), ki je leta 1814 to zahtevno delo začel, ter francoski zgodovinar in briljanten jezikoslovec Jean Francois Champollion (1790–1832), ki ga je uspešno dokončal, razvozlala hierogliffe ter s tem na široko odprla pot v zakladnico ene izmed najbogatejših kultur v zgodovini človeštva (ŽIT 1994/6, str. 8; ŽIT 2002/12, str. 47).

Young je z ustreznimi hieroglifi najprej povezal ime Ptolemaios (grške črke π, τ, ρ, υ in σ); temu je nato sledila še razlaga nekaterih hieroglifov za ptice in druge živali. Ker pa mu je zaradi številnih drugih obveznosti začelo primanjkovati časa, je leta 1821 s 'prevajanjem' hieroglifov

Horovo oko

Matematika je bila v starem Egiptu dostopna le veljakom, saj so jo povezovali z božanskimi silami. V egipčanski mitologiji so z matematiko povezana tri božanstva: Sešeta (boginja učenja in pisanja, zato je veljala za zavetnico pisarjev), Tot (bog geometrije oz. matematike, začetnik reda, razsodnik med dobrim in zlim) ter Hor – sin Ozirisa in Izide; njegovo oko pomeni osnovo merjenja in računanja z egipčanskimi ulomki.

Legenda pravi, da je nadobudni učenec nekega dne prišel k pisarju z ugotovitvijo, da je vsota ulomkov v Horovem očesu ravno $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$, torej manjša od 1. Učitelj mu je odgovoril, da manjkajočo štiriinšestdesetino bog Tot doda vsakemu pisarju, ki sprejme njegovo zaščito.



nadaljeval Champollion. Ta je poleg latinščine in stare grščine obvladal še šest orientalskih jezikov, med njimi tudi koptščino kot najmlajšo obliko antičnega egiptovskega jezika. Tako je najprej ugotovil, da hieroglifi ne označujejo samo črk, ampak tudi zloge in v nekaterih primerih kar cele besede. Vrhunsko raziskovalno delo je dokončal tik pred prezgodnjo smrtjo, ko mu je bilo le 41 let.

► RHINDOV PAPIRUS IN EGIPČANSKI ULOMKI

Če ne bi bilo odkritja kamna iz Rosette ter seveda Younga in Champolliona, bi bil papirus, ki ga je leta 1858 v Luksorju kupil škotski arheo-

log in zbiralec starin Alexander Henry Rhind, najbrž še vedno samo zanimiv zgodovinski predmet. Tako pa je okoli 5 m dolg in približno 30 cm širok papirusni zvitek, ki izvira iz obdobja okoli leta 1650 pr. n. š., postal eden izmed najbolj raziskovanih dokumentov starodavne matematike (ŽIT 2000/12, str. 48). Rhindov oziroma po avtorju – staroegipčanskem pisarju – imenovan tudi Ahmesov papirus nam tako s 84 opisanimi primeri razkriva, da so stari Egipčani znali reševati linearne enačbe, probleme iz ravninske in prostorske geometrije, poznali so elementarna zaporedja, sestavljali so posebne preglednice za lažje računanje in računali z ulomki.


 $\frac{1}{3}$

 $\frac{1}{10}$

 $\frac{2}{3}$

 $\frac{1}{2}$

 $\frac{3}{4}$

☞ Egipčani so ulomek zapisali kot usta, pod katerimi je visel imenovalec, pri čemer so dopuščali izjemo za zapis ulomkov $1/2$, $2/3$ in $3/4$.

Egipčansko računanje z ulomki

... je bilo z današnjega vidika precej nenavadno, saj so ulomke pisali kot vsoto ulomkov s števcem 1. Za tak zapis so uporabljali posebne formule in že izračunane preglednice, kot je ta z Rhindovega papirusa:

$$2/9 = 1/5 + 1/45 = 1/6 + 1/18$$

$$2/7 = 1/4 + 1/28$$

$$3/8 = 1/4 + 1/8$$

$$2/5 = 1/3 + 1/15$$

$$3/7 = 1/4 + 1/7 + 1/28$$

$$4/9 = 1/3 + 1/9$$

$$5/9 = 1/2 + 1/18$$

$$4/7 = 1/2 + 1/14$$

$$3/5 = 1/2 + 1/10$$

$$5/8 = 1/2 + 1/8$$

$$5/7 = 2/3 + 1/21 = 1/2 + 1/7 + 1/14$$

$$3/4 = 2/3 + 1/12 = 1/2 + 1/4$$

$$7/9 = 2/3 + 1/9$$

$$4/5 = 2/3 + 1/8 + 1/120 = 1/2 + 1/5 + 1/10$$

$$5/6 = 2/3 + 1/6 = 1/2 + 1/3$$

$$6/7 = 2/3 + 1/6 + 1/42 = 2/3 + 1/7 + 1/21$$

$$7/8 = 2/3 + 1/5 + 1/120 = 2/3 + 1/8 + 1/12 = 1/2 + 1/4 + 1/8$$

$$8/9 = 2/3 + 1/5 + 1/45 = 1/2 + 1/3 + 1/18$$

V današnji moderni pisavi si do zapisa egipčanskih ulomkov lahko pomagamo s formulami:

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \frac{1}{6n}$$

$$\frac{n}{pq} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{pq}$$

$$\frac{a}{ab-1} = \frac{1}{b} + \frac{1}{b(ab-1)}$$

Egipčanski merski sistem za votle mere je temeljil na enoti hekat (okrog 4,785 l), s katero so merili tekočino, med in tudi zrnje. Ko so hekat delili z 2, 4, 8, 16, 32 in 64, so dobili izpeljane mere: 6 ulomkov z imenovalcem 1 oz. šest egipčanskih ulomkov, ki predstavljajo šest delov Horovega očesa.

Zanimivo, da se je podobnega načina pisanja ulomkov – danes ga imenujemo požrešni algoritem – v 13. stoletju domislil italijanski matematik Leonardo Pisano, imenovan tudi Fibonacci, vendar z njim v glavnem ne dobimo enakih predstavitev ulomkov, kot so jih poznali egipčanski matematiki.

Za primer si oglejmo, kako ulomek $3/7$ kot vsoto egipčanskih ulomkov zapišemo s požrešnim algoritmom. Najprej moramo poiskati največji ulomek s števcem 1, ki je manjši od $3/7$. To je $1/3$, saj je $1/2$ že več od $3/7$. Nato odštejemo manjši ulomek od večjega ($3/7 - 1/3 = 2/21$) in spet po-

iščemo največji ulomek s števcem 1, ki je manjši od $2/21$. To je $1/11$, saj je $1/10$ več od $2/21$. Ko spet izračunamo razliko ($2/21 - 1/11 = 1/231$), dobimo rezultat požrešnega algoritma: $3/7 = 1/3 + 2/21 = 1/2 + 1/11 + 1/231$. Zanimivo je, da so egipčanski matematiki za enak ulomek poznali bistveno boljši zapis: $3/7 = 1/4 + 1/7 + 1/28$.

Čeprav se z egipčanskimi ulomki še vedno ukvarja veliko matematikov in so našli že precej algoritmov, doslej še niso razvozlati algoritma, ki ga je uporabljal pisar Ahmes. Največ sta na tem področju dognala Milo Gardner z Državne univerze Kalifornija in Hana Vimazalova s praške univerze.

Egipčanski matematiki so ulomke s števcem 1 uporabljali tudi pri deljenju. Ta operacija je temeljila na podobnem sistemu kot množenje. Če hočemo npr. število 329 deliti z 12, moramo število 12 po vrsti množiti z 1, 2, 4, 8, 16, 32 ... in potem od deljenca po vrsti odštevati te produkte, dokler število ni manjše od 12:

329		
12×16	192	$329 - 192 = 137$
12×8	96	$137 - 96 = 41$
12×4	48	–
12×2	24	$41 - 24 = 17$
12×1	8	$17 - 12 = 5$
27		

$$329 = 16 \times 12 + 8 \times 12 + 2 \times 12 + 1 \times 12 + 5 =$$

$$(16 + 8 + 2 + 1) \times 12 + 5 = 27 \times 12 + 5$$

oziroma $329 : 12 = 27 + 5/12 =$
 $= 27 + 1/3 + 1/12$

Matematiki še ne vedo natančno, kako so egipčanski pisarji reševali probleme, zato poskušajo priti do rešitev na različne načine. Za primer bomo po dveh poteh – z metodo napačne predpostavke ter neposredno z množenjem in deljenjem – rešili problem št. 24 z Rhindovega papirusa, ki se glasi: *Vsota količine in njene sedmine je 19. Kolikšna je ta količina?*

Z današnjim znanjem elementarne matematike bi problem zapisali v obliki linearne enačbe

$$x + x/7 = 19$$

in brez težav prišli do rešitve

$$x = 19/(1 + 1/7) = 133/8.$$

Nadaljujmo z metodo napačne predpostavke. Pisar si je zamislil rešitev $x = 7$ in napisal $x \times x/7 = 8$. Vendar bi desna stran enačbe morala biti 19, zato je moral enačbo po-

množiti z 19/8; torej je moral število 19 najprej deliti z 8.

1	8
2	16
1/2	4
1/4	2
1/8	1
$2 + 1/4 + 1/8$	19

$$8 \times (2 + 1/4 + 1/8) = 19$$

$$\text{in } 19/8 = 2 + 1/4 + 1/8$$

Iskano število je zdaj dobil tako, da je 7 pomnožil z dobljenim kvocientom:

$$7 \times ((1 + 1/7)) = 8$$

$$7 \times ((1 + 1/7)) \times (2 + 1/4 + 1/8) =$$

$$= 8 \times 19/8 = 19$$

Rešitev je torej

$$x = 7 \times (2 + 1/4 + 1/8) =$$

$$= 14 + 7/4 + 7/8 = 14 + 1 + 1/2 + 1/4 +$$

$$+ 1/2 + 1/4 + 1/8 =$$

$$= 16 + 1/2 + 1/8$$

Če se vam zdi ta metoda zapletena, se boste morali pri naslednji še bolj potruditi. Pisar je izračunal, kolikokrat gre 1 + 1/7 v 19 tako, da je zaporedoma podvajal to število (pri razcepu števila 2/7 si je oba krat pomagal s preglednico; glej str. 52):

1	$1 + 1/7$
2	$2 + 2/7 = 2 + 1/4 + 1/28$
4	$4 + 1/2 + 1/14$
8	$9 + 1/7$
16	$18 + 2/7 = 18 + 1/4 + 1/28$

Potem se je vprašal, koliko še manjka od $18 + 1/4 + 1/28$ do 19, in računal:

$$1/4 + 1/28 = (7 + 1)/28 = 8/28;$$

torej do 19 manjka 20/28 ali

$$(14 + 4 + 2)/28 = 1/2 + 1/7 + 1/14.$$

Dobljeno število bi moral deliti še z $1 + 1/7$, vendar je raje ravnal drugače. Vprašal se je, s katerim številom mora pomnožiti $1 + 1/7$, da dobi $1/2 + 1/7 + 1/14$ oziroma $20/28$.

In spet se je lotil deljenja:

1	$1 + 1/7$	
$1/2$	$1/2 + 1/14$	$(14 + 2)/28 = 32/56$
$1/4$	$1/4 + 1/28$	$(7 + 1)/28 = 16/56$
$1/8$	$1/8 + 1/56$	$(7 + 1)/56 = 8/56$

Iskano število, ki še manjka do 19, je $1/2 + 1/8$, zato je rešitev $x = 16 + 1/2 + 1/8$.

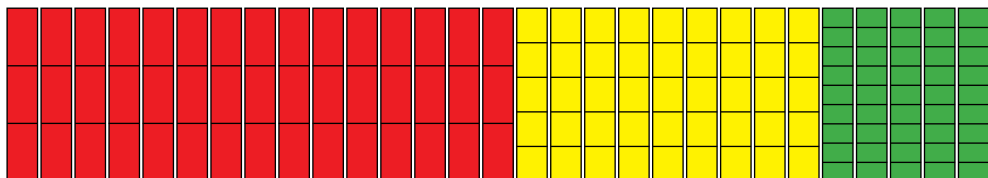
Za konec si oglejmo še praktično uporabo deljenja in egipčanskih ulomkov.

Predstavljajte si faraonovega uradnika, ki mora 29 enakih vreč pšenice pošteno razdeliti med 45

družin, pri tem pa ne sme stresti vsega semena v eno posodo in ga potem deliti. Naloge, ki se nam na prvi pogled zdi komaj rešljiva, so se uradniki v starem Egiptu pred več kot 4000 leti lotili tako, da so število $29/45$ najprej zapisali kot vsoto ulomkov s števcem 1 in dobili $29/45 = 1/3 + 1/5 + 1/9$. Potem so posamezne ulomke dopolnili do imenovalca 45. Iz zapisa

$29/45 = 1/3 + 1/5 + 1/9 = 15/(3 \times 15) + 9/(5 \times 9) + 5/(9 \times 5)$ vidimo, da so vsako od 15 vreč razdelili na tri dele, vsako od 9 vreč na pet delov in vsako od 5 vreč na devet delov. Tako so dobili tri različne množice, od katerih je imela vsaka 45 enakih delov.

Pšenica je bila torej najbolj pravično in predvsem najhitreje razdeljena, če je vsaka družina dobila po en del od vsake množice: .



SPLETNI NASLOVI

- https://en.wikipedia.org/wiki/Rosetta_Stone
kamen iz Rosette
- <http://www.sacred-texts.com/egy/trs/trs07.htm>
besedilo s kamna iz Rosette
(v angleškem jeziku)
- <http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html>
egipčanski ulomki

- https://en.wikipedia.org/wiki/Rhind_Mathematical_Papyrus
Rhindov oziroma Ahmesov papirus
- http://mathcs.slu.edu/history-of-math/index.php/Rhind_Mathematical_Papyrus
vsi problemi z Rhindovega papirusa
- http://www.math.buffalo.edu/mad/Ancient-Africa/mad_ancient_egypt_algebra.html#RATIOS
nekaj rešenih problemov z Rhindovega papirusa