



EVKLID : ORIGAMI = 0 : 1

► Gregor Pavlič

Najbrž ste že slišali za Evklida in njegov aksiomatski temelj geometrije. Če ne, ste pa prav gotovo v mladih letih s prepogibanjem papirja 'zgradili' letalo ali ladjico. In kaj imata skupnega evklidska geometrija in origami? Če boste prebrali ta članek, boste ugotovili, da pravzaprav veliko.

📌 Eden izmed 88 iz papirja zgibanih slonov in portret grškega matematika Evklida

LETA 1988 JE FRANCOSKI UMETNIK ALAIN GEORGEOT PRIPRAVIL RAZSTAVO 88 različnih slonov, zgibanih iz papirja. Morda je šlo zgolj za naključje ali pa se je že intuitivno zavedal pomembnosti origamija. Rojevati se je namreč začela nova matematična disciplina, ki je s preprostim zgibanjem papirja rešila geometrijske probleme, ki so matematike zaposlovali več kot dve tisočletji. Leta 1991 je japonsko-italijanski matematik Humiaki Huzita s člankom *Razumevanje geometrije z aksiomi origamija* (*Understanding Geometry through Origami Axioms*) postavil osnovo za matematično raziskovanje te znane japonske igre.

► ORIGAMI

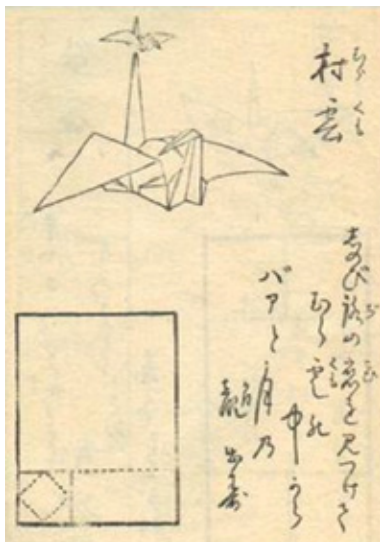
Z japonsko umetnostjo zgibanja papirja, ki je dobila ime po japonskih besedah *ori* = pregib in *kami* = papir, naj bi začeli budističnimi menihi, ki so v 6. stoletju na Japonsko prinesli papir. Ker pa je bil ta zelo drag, so origami uporabljali samo pri verskih obredih. Od 8. do 12. stoletja



📌 Različica znamenite schwarzwaldske ure kukavice iz leta 1987; brez rezov in z 216 različnimi zgibi – brez štetih ponavljanj – je narejena iz enega samega kosa papirja!

so bili mali zgibani predmeti pomemben okras pri izmenjavi daril med samuraji. Prvi pisni vir o origamiju najdemo v pesmi, ki je bila

➤ Leta 1797 je na Japonskem izšla prva knjiga o origamiju – *Hiden Senbazuru orikata*. V njej je bilo objavljenih več zgodb, ena od njih je govorila tudi o ptici iz papirja, ki je bila tako lepo oblikovana, da je oživila.



objavljena leta 1680 in opisuje zgibanje metulja pri pripravi šintoistične poročne slovesnosti. Leta 1797 je na Japonskem izšla prva knjiga o origamiju – *Senbazuru orikata*. V njej je bilo objavljenih več zgodb, med katerimi je ena govorila o ptici

iz papirja, ki je bila tako lepo oblikovana, da je kar oživila.

Umetnost origamija se je v Evropi lahko razvila povsem neodvisno, lahko pa je prišla po t. i. Svilni cesti – omrežju medsebojno povezanih trgovskih poti Azije z območjem Sredozemlja, Severne in Severozahodne Afrike ter Evrope, po katerih so več kot 3000 let tovorili svilo, začimbe, steklo in porcelan, s trgovino pa sta se širili tudi religija in kultura. Prvi evropski pisni vir o origamiju je ilustracija zgibanega čolnika v razpravi *Tractatus de sphaera mundi* iz leta 1490. Dolgo so ga pojmovali predvsem kot zanimivo obliko ročne spretnosti, večje zanimanje zanj pa se je pojavilo leta 1954, ko je Akira Jošizava zasnoval sistem simbolov zgibanja, ki je zdaj splošno sprejet. Navdušenje je tako naraslo, da so v posameznih državah ustanovili posebna združenja origamistov.

Evklidska geometrija

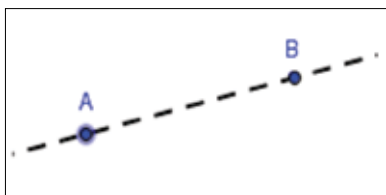
Starogrški matematik Evklid (okoli 365–275 pr. n. š.) se je šolal pri Platonovih učencih v Atenah, potem pa deloval v glavnem v Aleksandriji, kjer je po smrti Aleksandra Makedonskega eden od njegovih generalov Ptolemaj I. Soter ustanovil slovito univerzo in knjižnico Muzej. Napisal je veličastno delo *Elementi* (Stoiheia) v 13 knjigah, v katerem je zbral in sistematično obdelal vse znanje matematike (geometrije in teorije števil) tistega časa. Delo se je ohranilo po zaslugi arabskega in pozneje latinskega prevoda in še danes po več kot 2000 letih z minimalnimi izboljšavami ostaja osnova za srednješolski program poučevanja elementarne geometrije.

Osnova Evklidove geometrije so aksiomi – trditve, katerih veljavnost je očitna in jih zato ne dokazujemo. Za vse geometrijske konstrukcije je Evklid predvidel le neoznačeno ravnilo in šestilo, čemur danes rečemo evklidsko orodje. Tako so grški matematiki znali prenesti daljico znane dolžine, razpoloviti daljico, narisati pravokotnico na premico skozi dano točko, razpoloviti kot, prenesti kot znane velikosti, narisati vzporednico dani premici skozi dano točko, razdeliti daljico na n enakih delov in razdeliti daljico v danem razmerju. Večine teh konstrukcij se danes naučijo že osnovnošolci.

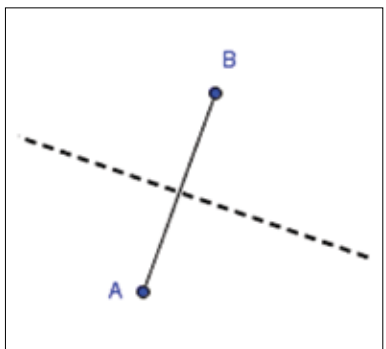
► GEOMETRIJA ORIGAMIJA

Huzita je pri proučevanju origamija ugotovil veliko podobnost z evklidsko geometrijo in po Evklidovem zgledu postavil naslednjih šest aksiomov 'matematičnega origamija':

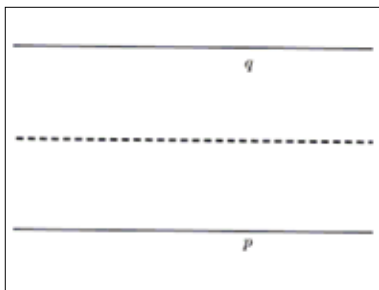
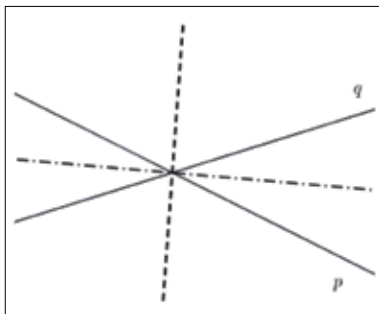
1. aksiom: *Skozi dve različni točki lahko naredimo en sam pregib.* Pri Evklidu je na prvem mestu enak aksiom, ki pravi, da gre skozi dve različni točki natanko ena premica.



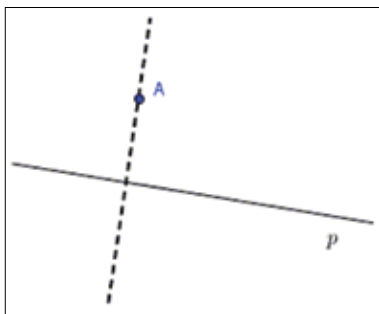
2. aksiom: *Obstaja en sam pregib, s katerim dano točko A prenesemo na dano točko B (pri čemer velja $B \neq A$).* Po starem bi rekli, da obstaja natanko ena simetrala daljice AB.



3. aksiom: *Obstajata dva pregiba, s katerima dano premico p prenese-mo na dano premico q, če se premici sekata, in en sam pregib, če sta vzporedni.* Po Evklidu obstajata dve simetrali kota, če se premici sekata, in ena premica, ki je enako oddalje-na od dveh vzporednic.

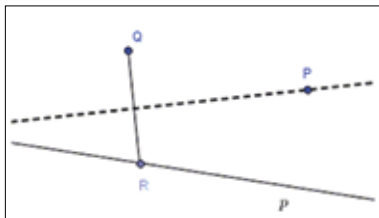


4. aksiom: *Samo na en način lahko naredimo pravokoten pregib skozi dano točko A na dano premico p.* Ta Evklidov aksiom pravi, da skozi dano točko A obstaja natanko ena pravokotnica na dano premico p.

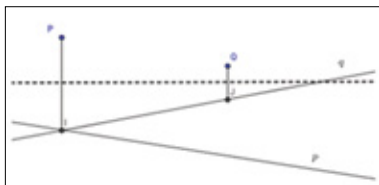


5. aksiom: *Obstaja samo en pre-gib skozi dano točko P, prek katerega se točka Q prezrcali na dano premico p (slika točke Q je R).* Če je pravokotna razdalja točke P od premice p manjša od razdalje do točke Q, lahko konstruiramo krožnico s središčem v P, ki gre skozi Q in seka

premico p v točki R . Obstaja samo ena simetrala daljice QR .



6. aksiom: Če sta dani različni premici p in q (ki se sekata) in različni točki P in Q , obstaja natanko en pregib, prek katerega se točka P prezrcali na premico p in se točka Q prezrcali na premico q . Zanimivo je, da ne obstaja konstrukcija z evklidskim orodjem, ki bi nadomestila ta aksiom.



Ko je Koširo Hatori leta 2001 postavil tudi sedmi aksiom, se je pojavilo vprašanje, ali obstaja še kakšen aksiom, ki bi nadgradil teorijo. Največja avtoriteta na tem področju, Robert J. Lang, je že naslednje leto dokazal, da je z naštetimi sedmimi aksiomatična teorija matematičnega origamija popolna.

7. aksiom: Če so dane točka T ter premici p_1 in p_2 , obstaja pregib, ki točko T preslika na premico p_2 (slika je točka T_1) in je pregib pravokoten na premico p_2 . Tudi temu aksiomu v evklidski geometriji ne moremo najti podobnega izreka.

Resnici na ljubo je treba povedati, da se je pozneje izkazalo, da je



vseh sedem aksiomov že leta 1986 odkril francoski matematik Jacques Justin, vendar tega ni objavil, zato jih danes imenujemo Huzita-Justinovi aksiomi.

▶ TRIJE ZNAMENITI PROBLEMI GEOMETRIJE

Kljub obširnemu znanju geometrije so starogrški matematiki naleteli na tri probleme, ki jih niso znali rešiti z evklidskim orodjem. To so podvojitve (*duplikacija*) kocke, raztretjitvenje (*trisekcija*) kota in kvadratura kroga.

Problem podvojitve kocke se je pojavil že v delu nekega matematično neizobraženega grškega pesnika. Pisal je o mitološkem kralju Minosu, ki ni bil zadovoljen z velikostjo grobnice svojega sina Glavka. Zahteval je dvakrat večjo grobnico in menil, da je to mogoče preprosto doseči s podvojitvijo vseh njenih dimenzij. Ta pesnikova 'matematika' je spodbudila matematike, da so se lotili problema, kako podvojiti prostornino trdnega telesa, da pri tem ohrani nespremenjeno obliko.

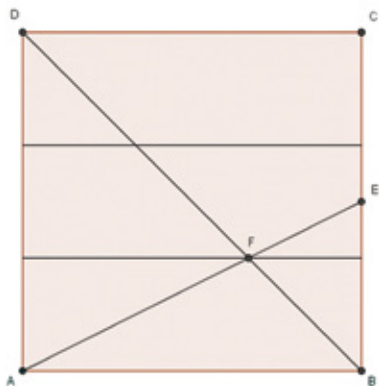
Znana je še druga zgodba. Vedež iz Apolonovega svetišča na otoku Delosu je prerokoval ljudstvu v Atenah, da se bo rešilo kuge, če bodo njegov oltar v obliki kocke povečali tako, da bo njegova prostornina dvakrat večja od prvotne. Najbrž so *delski problem* zaupali Platonu, ki ga je predložil

Mislimo si, da je za 90° zasukan prejšnji kvadrat DABC s stranico 1 postavljen v koordinatni sistem z izhodiščem v točki D. V njem vidimo dva podobna trikotnika $\triangle GAE$ in $\triangle HAF$, ki imata enako ležeče stranice v enakem razmerju:

$$|EG| : |FH| = |GA| : |HA| \text{ oz. } 1 : x = (1/2) : (1 - x).$$

Iz sorazmerja dobimo preprosto linearno enačbo $1 - x = x/2$, ki nam da rešitev $x = 2/3$. Iz tega sledi, da je $[DH] = 2/3$ in $[HA] = 1/3$.

Avtor te rešitve problema z zgibanjem je Hisaši Abe. Če začnemo s papirjem, ki smo ga že razdelili na tri enake dele, lahko poljuben ostrikot $\angle BAP$ razdelimo na tri enake dele s samo tremi pregibi. Za prvi



pregib uporabimo 6. aksiom. Pri tem točka G pade na daljico AP (slika je točka R), točka A pa na daljico HN (slika je točka Q). Pregib je označen z rdečo prekinjeno črto. Naslednji pregib skozi točko A in pravkar dobljeno točko Q nam že da prvo tretjino izbranega kota. Z uporabo 3. aksioma razpolovimo še kot $\angle PAQ$.

Za razumevanje te konstrukcije potrebujemo le osnovnošolsko znanje geometrije.

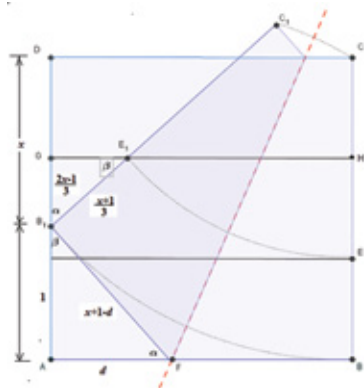
Najprej označimo $\alpha = \angle BAQ$. Ker sta daljici AB in HN vzporedni, velja $\angle AQH = \alpha$.

Trikotnik $\triangle GAQ$ je očitno enakokrak, zato je HQ simetrala osnovnice GA in razpolavlja kot ob vrhu. Iz tega zaključimo, da je $\angle AQH = \angle HQG = \alpha$. Daljica AG se pri prepogibanju prenese na QR, zato je pregib simetrala enakokrakega trapeza AQRG ter tudi enakokrakih trikotnikov $\triangle AQT$ in $\triangle AQS$. Enakokraki trikotnik ima enaka kota ob osnovnici; v prvem primeru velja: $\angle AQT = \angle TQA = \alpha$, v primeru drugega enakokrakega trikotnika pa $\angle SAQ = \angle RQA = 2\alpha$.

Od tod že sledi, da je $\angle SAT = \alpha$, s čimer je veljavnost konstrukcije potrjena.

Podvojitev kocke

To rešitev problema z zgibanjem je odkril Peter Messer. Spet začnemo s kvadratom, ki smo ga prepognili na tri enake dele, naravnost neverjetno pa je, da je za nadaljevanje reševanja potreben en sam pregib. Spet uporabimo 6. aksiom. Desno spodnje oglišče B postavimo na levo pokončno stranico kvadrata (točka B_1), točko s spodnje tretjinske daljice E pa na daljico zgornje tretjine (točka E_1). Točka B_1 razdeli daljico DA v razmerju, ki je enako $|DB_1| : |B_1A| = \sqrt[3]{2} : 1 = \sqrt[3]{2}$. S prenosom točke B na daljico AD



(točka B_1) in točke E na daljico GH (točka E_1) nastane pregib, označen z rdečo prekinjeno črto. S tem dobimo dva podobna trikotnika $\triangle AFB_1$ in $\triangle GB_1E_1$, ki imata enakoležne stranice v enakem razmerju. Za dolžino stranice kvadrata ABCD vzamemo $x + 1$, da je izpeljava preprostejša.

Dolžine posameznih stranic podobnih trikotnikov dobimo iz podatka, da je stranica kvadrata dolga $x + 1$, in iz premikov daljic pri pregibanju:

$$|E_1B_1| = |EB| = (1/3)(x + 1), |GB_1| = x - 1/3(x + 1) = (2x - 1)/3.$$

$$\text{Dobimo sorazmerje } |AF| : |FB_1| = |GB_1| : |E_1B_1| \text{ oz. } d : (x + 1 - d) = ((2x - 1)/3) : (x + 1/3).$$

Za pravokotni trikotnik $\triangle AFB_1$ zapišemo Pitagorov izrek: $12 + d^2 = (x + 1 - d)^2$ oz.

$$12 + d^2 = x^2 + 1 + d^2 + 2x - 2dx - 2d,$$

od koder dobimo:

$$d = \frac{x^2 + 2x}{2x + 2}$$

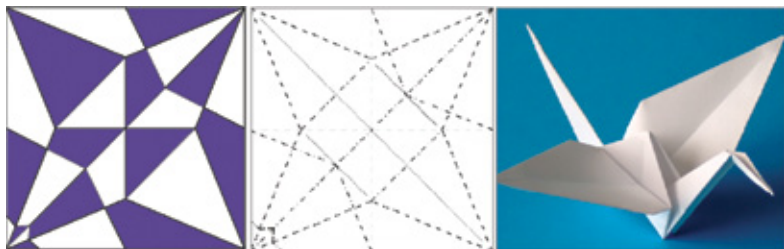
Ta novi zapis za d vstavimo v zgoraj izračunano sorazmerje:

$$\frac{x^2 + 2x}{2x + 2} \cdot \frac{x + 1}{3} = \frac{2x - 1}{3} \cdot \left(x + 1 - \frac{x^2 + 2x}{2x + 2} \right)$$

S krajšanjem in množenjem dobimo urejeno enačbo

$$2x^3 + 3x^2 + 2x - 2 = x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x$$

in od tod $x = \sqrt[3]{2}$.



🔗 Dvobarvnost z gibalnega načrta in narejeni žerjav

► ORIGAMI IN UMETNOST

V 20. stoletju je japonski origamist Jošizava ustvaril več deset tisoč novih oblik origamija. Še pomembnejši pa je bil njegov 'jezik' oz. označevanje posameznih zgibov iz pik, črtic in puščic. Z uporabo matematike je prišlo do pomembnega preskoka pri razumevanju in risanju vzorcev za pregibanje.

Izkazalo se je, da je treba upoštevati le štiri zakonitosti:

1. Vsak vzorec zgibanja lahko po-barvamo z dvema barvama tako, da sta vzdolž vsakega pregiba različni barvi.

2. Število vbočenih in izbočenih zgibov v vsakem vozlišču se vedno razlikuje za dva: dva več ali dva manj.

3. Če kote v zgibu oštevilčimo v krogu, je vsota kotov s sodimi indeksi enaka 180° , pa tudi vsota kotov z lihimi indeksi je enaka 180° .

4. Pri zlaganju zgibov in ploskev slednja nikoli ne prebode zgiba.

Robert J. Lang je za načrt zgibanja sestavil poseben računalniški pro-

gram *Tree Maker*, ki je brezplačno dosegljiv na spletu. Uporablja princip pakiranja krogov, ki so ga podrobno proučili že desetletje prej, ko se sploh še ni vedelo za povezavo z origamijem. Tako lahko sestavimo neverjetne oblike od živali do organista (spodaj).

🔗 Načrt in izdelek



► ORIGAMI IN TEHNIKA

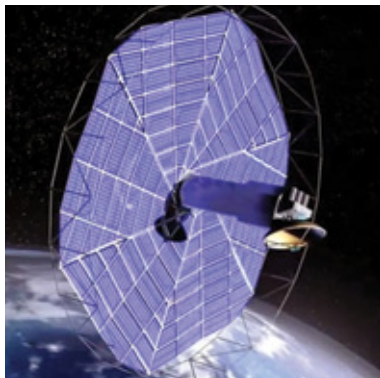
Matematika velikokrat obravnava objekte, ki so na prvi pogled bolj sami sebi namen, a se njihovim razvijalcem zdijo estetski oziroma lepi. Včasih se šele pozneje izkaže, da je kakšen tak objekt izjemno uporaben

🔗 Primeri domiselnih origamijev





➡ V laboratoriju Lawrencea Livermora so izdelali teleskop Okular z lečo premera 100 m (približno površina nogometnega igrišča), ki potuje po geosinhroni krožnici 42.000 km visoko. V vesolje so ga poslali po zaslugi origamistov, ki jim je uspelo lečo zložiti v pregibe na nekaj metrov, da jo je bilo mogoče spraviti v raketo.



v znanosti in tehniki. Tako se je zgodilo tudi z origamijem.

Kot prvega izmed zanimivejših primerov te vrste omenimo sončni zbiralnik, ki ga je japonski inženir Korio Miura zložil v zelo kompakten vzorec, ki se preprosto odpira in zapira ter je leta 1995 skupaj s teleskopom poletel v vesolje.

Kitajski zdravnik Čong Ju z oxfordске univerze je s pomočjo origamija razvil žilno opornico, ki pomaga

➡ Primeri uporabe origamija pri izdelavi pročelij, žaluzij in akustičnih elementov

pri zdravljenju zamašenih žil. Ker se zloži na zelo majhno dimenzijo, jo je mogoče lažje uvesti v žilo kot klasične opornice.

V zadnjem času origami veliko uporabljajo tudi v arhitekturi kot umetniški element pri oblikovanju pročelij, pa tudi funkcionalno za senčila in akustiko.

Morda bo origami s časom dobil podobno vlogo, kot so jo dobila prашtevila. Pred več kot dva tisoč leti so se zdela pomembna samo v teoriji števil, danes pa bi brez njih propadla vsa kriptografija in z njo spletno finančno poslovanje. Morda vam bo origami celo rešil življenje, če boste potrebovali žilno opornico, ali pa se vam bo v avtomobilski nesreči sprožila varnostna blazina, zložena po načelih origamija.

➡ Zložena in razprta žilna opornica v slogu origamija



SPLETNI NASLOVI

- ▶ plus.maths.org/content/power-origami origami in matematika
- ▶ www.takayaiwamoto.com/Greek_Math/Famous_Problems.html trije znameniti problemi geometrije
- ▶ www.ams.org/mathimagery/thumbnails.php?album=16 zgibani predmeti enega najboljših origamistov Roberta J. Langa
- ▶ www.youtube.com/watch?v=n1K_gKP_7Q predavanje Roberta J. Langa