PRESEK

List za mlade matematike, fizike, astronome in računalnikarje

ISSN 0351-6652
Letnik **7** (1979/1980)
Številka 2
Strani 77–80

Gregor Pavlič:

# KAKO PODVOJITI KOCKO?

Ključne besede: matematika.

Elektronska verzija: http://www.presek.si/7/428-Pavlic.pdf

# KAKO PODVOJITI KOCKO ?

Problem podvojitve kocke se je pojavil že v delu nekega matematično neizobraženega grškega pesnika. Pisal je o mitološkem kralju Minosu, ki ni bil zadovoljen z velikostjo grobnice svojega sina Glavka. Zahteval je dvakrat večjo grobnico in menil, da se da to storiti s podvojitvijo vseh njenih dimenzij. Ta pesnikova "matematika" je vzpodbudila geometre, da so se lotili problema, kako podvojiti trdno telo, da pri tem ohrani obliko.

Znana je še druga zgodba. Delski vedež je prerokoval ljudstvu, da se bo rešilo kuge, če bodo podvojili Apolonov kockasti oltar. Najbrž so problem zaupali Platonu, ki ga je predložil geometrom v svoji Akadamiji. Zato se tudi imenuje delski problem.

Naj je zgodba resnična ali ne, vendar so se s podvojitvijo kocke ukvarjali številni grški matematiki in tudi prišli do rešitve. Znani so Menehmus, Arhitras, Evdoksos, Eratostenes, Pappus, Diokles, Hipokrat in drugi.

Matematiki so se zelo trudili, da bi problem rešili le s šestilom in neoznačenim ravnilom (Evklidsko orodje), pa ni šlo. Danes vemo zakaj! *S šestilom in ravnilom se ne da narisati premic, ki bi imeli dolžini v razmerju* $\sqrt[3]{2} : 1$ . Problem podvojitve kocke je eden od treh znamenitih problemov grške matematike*

Če je $a$ stranica kocke, je treba poiskati stranico $x$ kocke, ki bo imela dvakrat večjo prostornino $x^3 = 2a^3$ oziroma $x = \sqrt[3]{2}\, a$ .

Poglejmo si dve rešitvi:

(A) Hipokrat (460 pr.n.š.) je sklepal takole: če lahko najdemo sestavljeno sorazmerje dveh danih premic $a : x = x : y = y : 2a$ , ne more biti več daleč do rešitve.

Iz tega dobimo:

---

*Še *kvadratura kroga* in *trisekcija kota* (glej Presek III/3, str. 166). Primerjaj še Presek IV/4, str. 197.

$$x^2 = ay \quad , \quad x^4 = a^2y^2 \quad ; \quad y^2 = 2ax \quad \text{in zato}$$
$$x^4 = 2a^3x$$

Od tod pa

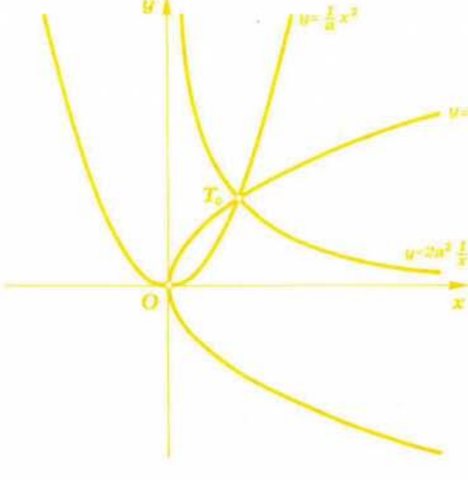
$$x(x^3 - 2a^3) = 0 \quad \text{in} \quad x^3 = 2a^3$$

Toda Hipokrat do končne rešitve ni prišel; na osnovi njegovega dela je problem rešil Menehmus (350 pr.n.š.). Iz sestavljenega sorazmerja je dobil tri enačbe

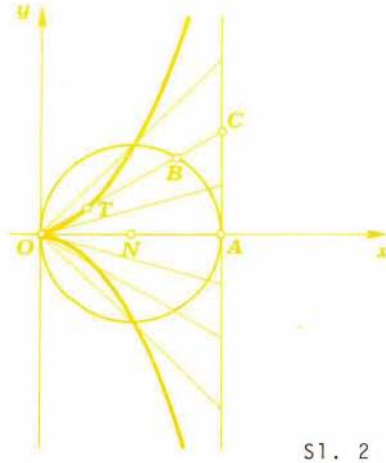
$$x^2 = ay$$
$$y^2 = 2ax$$
$$xy = 2a^2$$

Prvi dve predstavljata krivuljo parabole, tretja pa hiperbolo (sl. 1). Abscisa točke, kjer se pri danem $a > 0$ vse tri krivulje sekajo, je rešitev.

(B) Najbolj znana je Dioklesova rešitev. Pomagal si je s krivuljo cisoido (po naše bi rekli bršljančnica): $y^2(a - x) = x^2$ . Cisoido narišemo takole (sl. 2). V pravokotnem koordinatnem si




Sl. 1




Sl. 2

stemu narišemo krog s polmerom $a/2$ in središčem v točki $N(a/2, 0)$, v točki $A(a, 0)$ pa tangento na krog. Eno od točk cisoide dobimo tako, da iz izhodišča $O$ narišemo poltrak pod poljubnim kotom, ki seka krožnico v točki $B$, tangento pa v točki $C$. Daljico $BC$ prenesemo po poltraku do izhodišča $O$ in dobimo točko krivulje $T$, da velja $OT = BC$.

Potek rešitve:

Najprej narišemo krog z radijem $r$ (sl. 3), diametralni točki označimo z $A$ in $B$, pravokotnica na premer skozi središče $O$ naj seka krožnico v točki $C$, konstruiramo še tangento v $B$. Cisoido konstruiramo tako, da poteka skozi točki $A$ in $C$.

Razpolovišče $OC$ naj bo točka $M$ in iz $B$ skozi $M$ potegnimo premico, ki seka cisoido v točki $P$. Skozi $A$ in $P$ potegnimo premico, ki seka krožnico v točki $D$. V točkah $P$ in $D$ narišemo pravokotnici na premer in dobimo nove točke: $S$ na krožnici ter $L$ in $R$ na premeru.

Po definiciji cisoide je $AP = DE$, zato iz Talesovega izreka o sorazmerjih sledi $AL = RB$ in $LO = OR$.

Označimo sedaj $LB$ z $a$, $AL$ z $x$ in $SL$ z $y$ in poglejmo razmerje

$LB : PL = OB : OM$ ali

$a : PL = r : r/2 \Rightarrow PL = a/2$

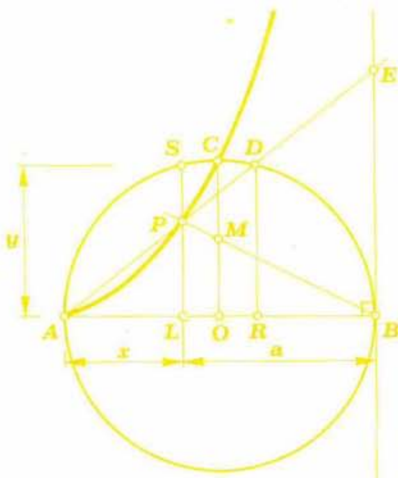
Da rešimo nalogo, poglejmo nekatere podobne ali pa skladne trikotnike. Očitno velja

$\Delta ALP \sim \Delta ARD$ in $\Delta ARD \cong \Delta BSL$

iz višinskega izreka v pravokotnem trikotniku (kraka poteka skozi diametralni točki, vrh pa je na krožnici) pa sledi $\Delta BSL \sim \Delta ALS$.

Torej velja

$\Delta BSL \sim \Delta ALS \sim \Delta ALP$ in od tod




Sl. 3

$$a : y = y : x = x : PL = x : a/2 \ .$$

Iz tega sestavljenega sorazmerja dobimo

$$ax = y^2 \quad \text{oziroma} \quad x^2 = y^4/a^2 \quad \text{in} \quad x^2 = (a/2)y \ .$$

Izenačimo desni strani obeh enačb

$$\frac{a}{2} y = \frac{y^4}{a^2}$$

in rešitev je na dlani:

$$\frac{1}{2} a^3 = y^3$$

$$a^3 = 2y^3$$


Literatura:

Howard Eves , An Introduction to the History of Mathematics

Eugene Smith, History of Mathematics


*Gregor Pavlič*